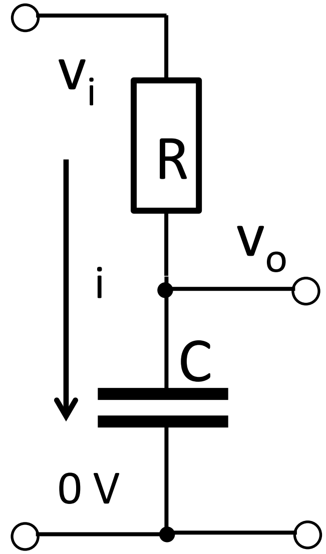
フィルタ

抵抗Rとキャパシタ C（CR回路）、抵抗Rとインダクタ L（LR回路）からなる回路は、特定の周波数を境に正弦波を通したり遮断したりする。このような働きをする回路とフィルタと呼ぶ。低周波を通す回路はローパス・フィルタ（またはハイカット・フィルタ）、高周波を通す回路はハイパス・フィルタ（またはローカット・フィルタ）と呼ばれる。これらの動作をインピーダンスを使って解析してみよう。

CR回路

周波数ωの正弦波の入力電圧を v_i、出力電圧を v_o とする。また入力に対する出力の比Aを電圧増幅率と呼ぶ。

Aはフィルター回路の周波数応答＝伝達関数でもある。



R,*C*に流れる電流を*i*とすると、素子の電圧降下から、

$$v_i = (\mathrm{R} + 1/j\omega C)\,i$$

$$v_o = (1/j\omega C)\,i$$

となる。*A*は周波数*ω*の関数

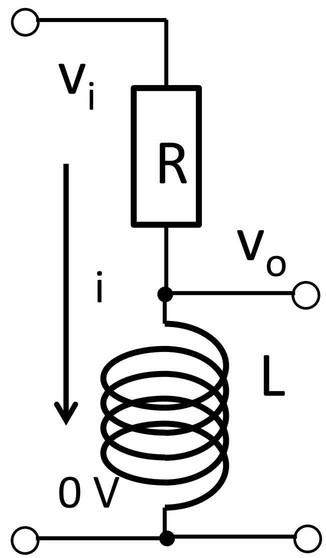
$$A = \frac{1/\,j\omega C}{R + 1/\,j\omega C} = \frac{1}{j\omega CR + 1}$$

$$= \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

となる。

LR回路

同じく周波数ω の正弦波の入力電圧をv_i、出力電圧をv_oとする。また入力に対する出力の比をAとすると、Aはやはり周波数を分けるフィルターの働きをする。



*R,C*に流れる電流を*i*とすると、素子の電圧降下から、

$$v_i = (\mathrm{R} + j\omega L)\,i$$

$$v_o = (j\omega L)\,i$$

となる。*A*は周波数*ω*の関数

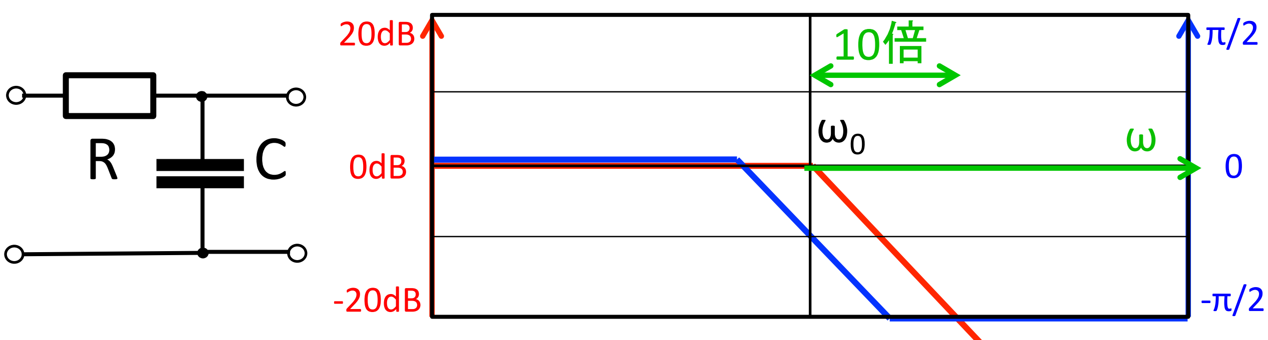
$$A = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{(\omega L)^2 + j\omega LR}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \frac{1 + j(R/\omega L)}{1 + (R/\omega L)^2}$$

となる。

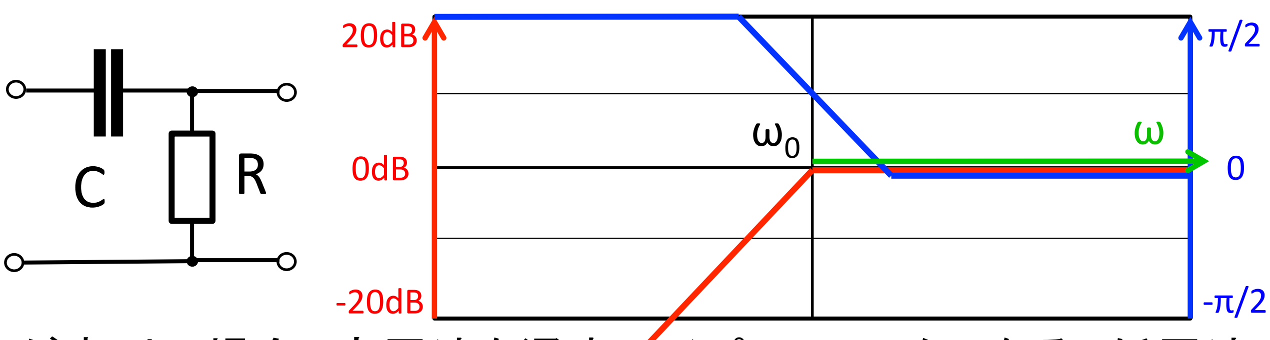
CR回路の周波数特性

抵抗RとキャパシタCからなる回路の周波数特性を計算すると、周波数ω_0=1/(CR)を境に、低周波側(ω→0)と高周波側(ω→∞)で異なる挙動を示す。高周波（または低周波）側では周波数が10倍になるごと(dec=decade)に電圧は10分の1（または10倍）になり、電力は100倍=20dB変化する。



$$A=\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$$

Cが並列の場合、低周波を通すローパスフィルタになる。高周波は-20dB/decで減衰する。

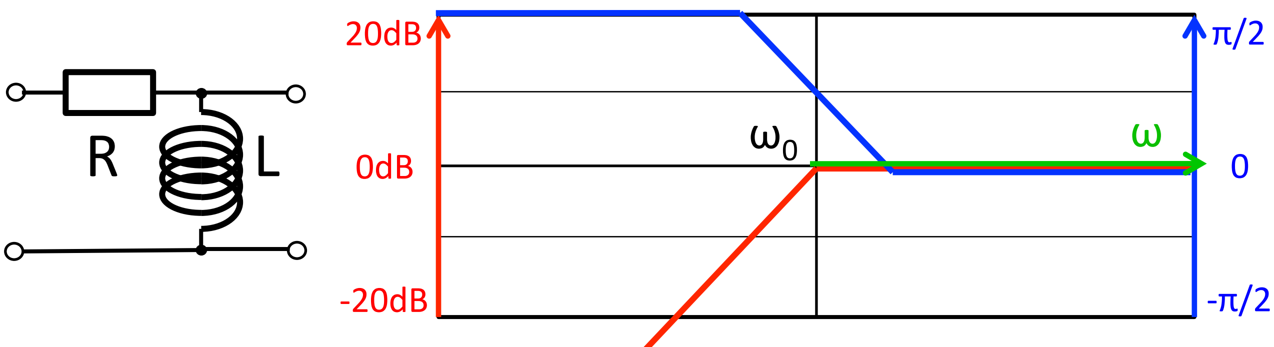


$$A=\frac{(\omega CR)^2+j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$$

Cが直列の場合、高周波を通すハイパスフィルタになる。低周波は20dB/decで減衰する。

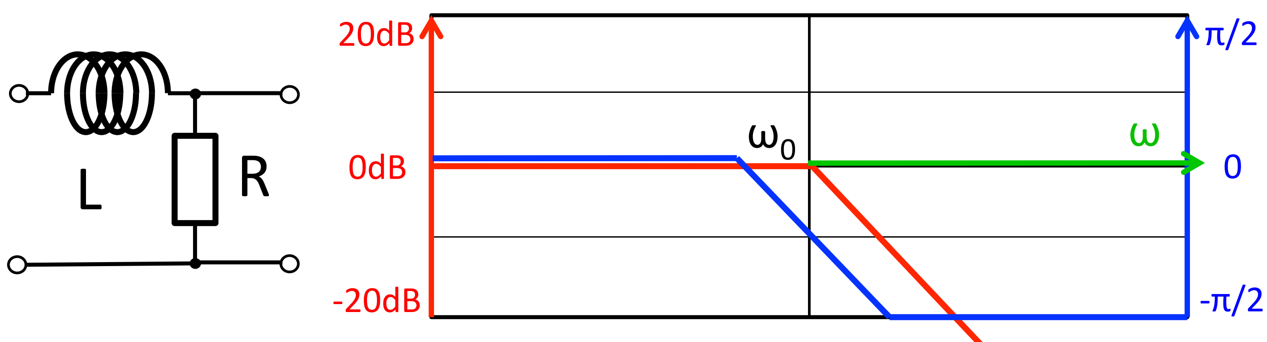
LR回路の周波数特性

　抵抗RとインダクタLからなる回路の周波数特性は、周波数ω_0=R/Lを境に、低周波側(ω→0)と高周波側(ω→∞)で異なる挙動を示す。CR回路の直列・並列を逆にした特性となる。
ω_0は遮断周波数と呼ばれる。遮断周波数を境に、周波数の対数を横軸、電力利得と位相を縦軸に周波数特性を描いた図をBode線図と呼ぶ。これによって周波数特性を模式化できる。



$$A=\frac{(\omega L)^2+j\omega LR}{R^2+(\omega L)^2}$$

Lが並列の場合、高周波を通すハイパス・フィルタになる。低周波は20dB/decで減衰する。



$$A=\frac{R^2-j\omega LR}{R^2+(\omega L)^2}$$

Lが直列の場合、低周波を通すローパス・フィルタになる。高周波は-20dB/decで減衰する。

付録A：電力と電圧のdB

dBは音や電力のエネルギーの比率を対数スケールで表す単位で、電力Wが10倍大きくなると、dBは10大きくなる。例えば1Wの入力を10Wにして出力するアンプがあれば、その増幅率は10dBになる。

増幅率RをdB単位で表すと、複数の素子の増幅率を足し算で計算できる。10dBのアンプを3台つなげれば30dB=1000倍になる。入力w1, 出力w2とすると、

$$R\ [dB] = 10\ Log_{10}(w_2/w_1)$$

しかし、一般に電気的に測定されるのは電圧vの場合が多い。$W=v^2/Z$の関係を思い出すと、電圧が10倍になれば、電力比Rは100倍になる。つまり、dB単位では20になる。

$$R\ [dB] = 20\ Log_{10}(v_2/v_1)$$

電圧増幅率のdB表示は電力とは異なるのである。

これは音でも同様で、音の大きさはエネルギーではなく音圧で表すので、音圧pに対して、音量Rは

$$R\ [dB] = 20\ Log_{10}(p_2/p_1)$$

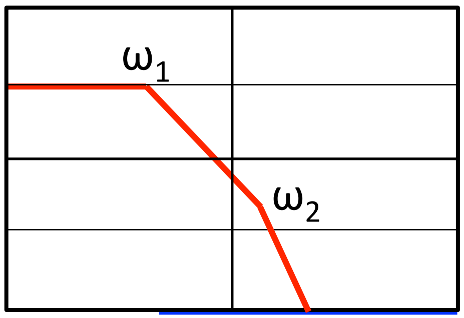
となる。p_1は基準の音の強さで$2 \times 10^{-5}\ N/m^2$である。　＞＞つづく

ボーデ線図

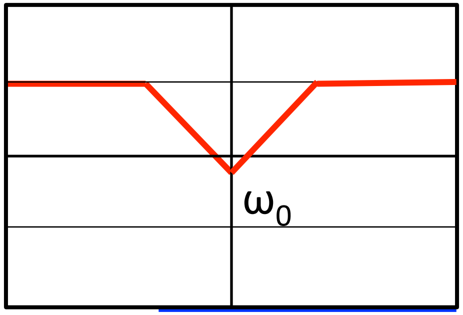
フィルター特性を表すボーデ線図は、横軸が周波数ωのLog10、縦軸がエネルギー比のLog10で、両対数グラフになっている。両対数グラフでは、一次関数は傾き1、二次関数は傾き2と、線の傾きから、変数に対する関数の次数が分かる。

一段のCR回路、LR回路はいずれも周波数に対して一次の関数なので、傾き1になる。もしフィルターを2段重ねれば二次のフィルタなので傾き2になる。CとLをつなげば一次とマイナス一次が重なって、中央が凹んだ折れ線になる。これは共振曲線を表す。

このように対数グラフを使うことで、フィルタの次数（鋭さ）や共振を容易に見分けることができる。



二次のフィルター



共振のグラフ
（並列共振）

付録B:インピーダンスとアドミッタンスの変換

直列回路のインピーダンスZはガウス平面上で垂直な直線となる。その逆数であるアドミッタンスYは、円を描くことを確認しておこう。CRからなる直列回路のインピーダンスZは

$$Z = R + 1/j\omega C = R - j/\omega C$$

であるが、ここで遮断周波数ω_0=1/CRを基準としてた周波数比k=ω/ω_0で式を書き換えると、インピーダンスは

$$Z = R\left(1 - j/k\right)$$

となる。この回路のアドミッタンスYはZの逆数で,G=1/Rとして

$$Y = G/\left(1 - j/k\right)$$

である。Gは定数なので（1-j/k）に注目し、そこから1/2を引く。

$$\frac{1}{\left(1-j/k\right)} - \frac{1}{2} = \frac{\left(1+j/k\right)}{2\left(1-j/k\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(1+j/k\right)^2}{\left(1-j/k\right)\left(1+j/k\right)} = \frac{1}{2}\frac{1-1/k^2+j2k}{1+1/k^2}$$

次のページにつづく。

式の続き

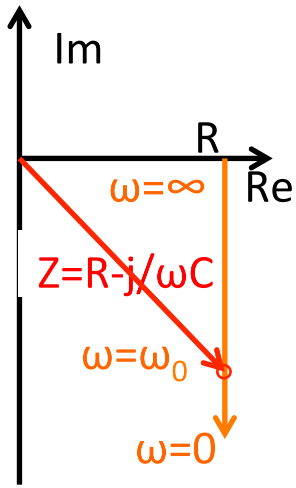
ここで右辺に注目。

$$\frac{1-1/k^2+j2/k}{1+1/k^2}=\frac{1-1/k^2}{1+1/k^2}+j\frac{2/k}{1+1/k^2}$$

この式に複素共役を掛けて絶対値を求めると1になるので、この式の成分はcosθとjsinθで表せる。

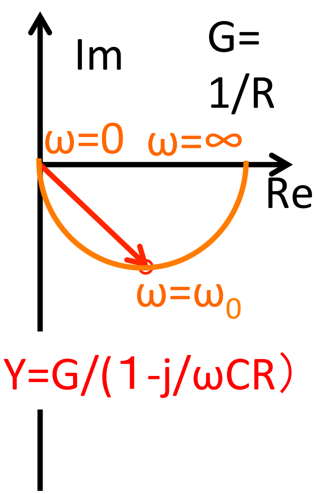
$$\left\{\frac{1-1/k^2}{1+1/k^2}+j\frac{2/k}{1+1/k^2}\right\}\left\{\frac{1-1/k^2}{1+1/k^2}-j\frac{2/k}{1+1/k^2}\right\}$$

$$=\frac{1-2/k^2+1/k^2+4/k^2}{\left(1+1/k^2\right)^2}=1$$



よって、

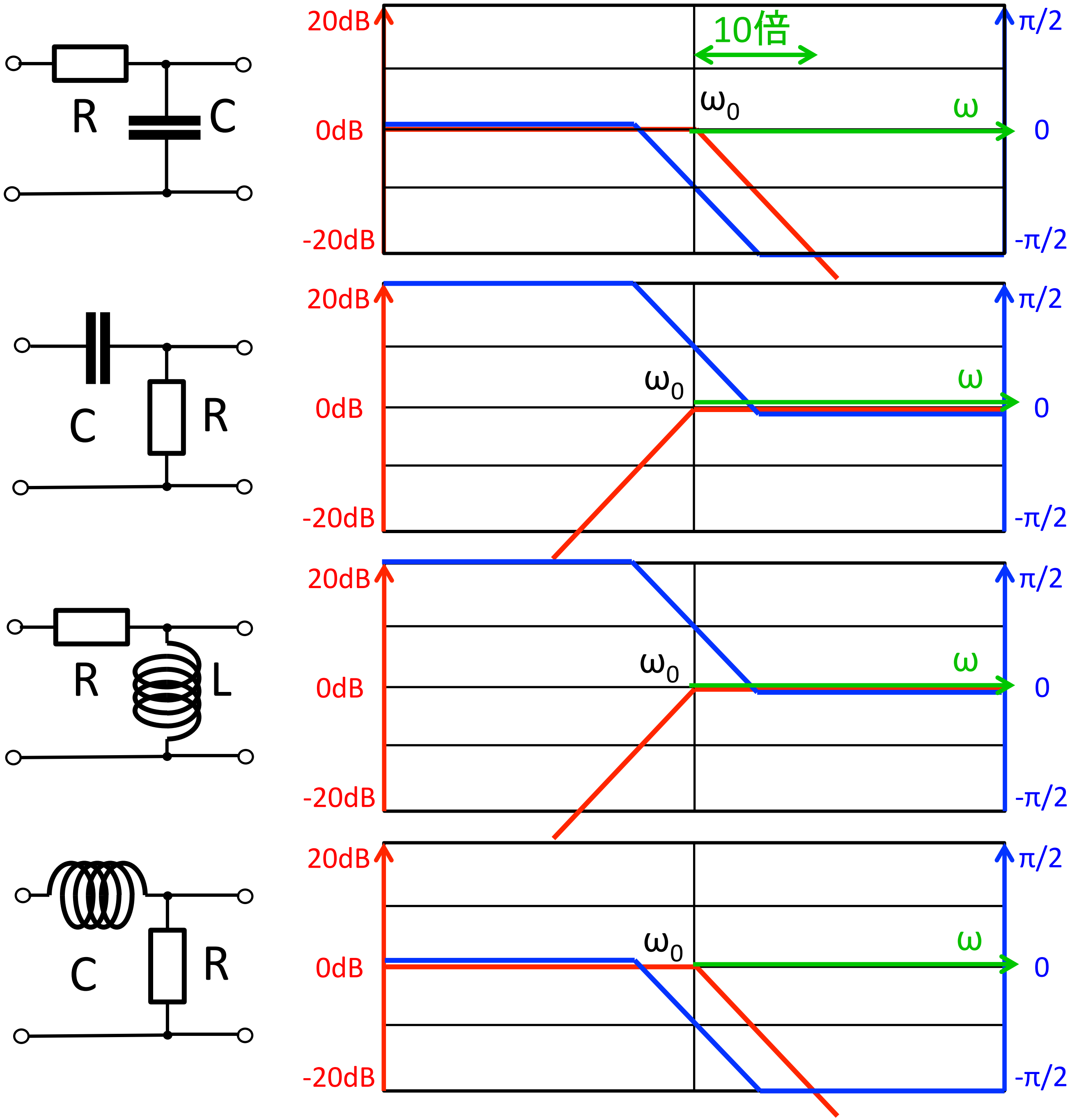
$$\frac{1}{\left(1-j/k\right)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos\theta+j\sin\theta)=\frac{1}{2}\exp\left(j\theta\right)$$



Y=G/(1-j/ωCR)

となり、アドミッタンスYは次の式で表され、円を描く。

$$Y=G\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left(j\theta\right)\right)$$


R
C
20dB
0dB
-20dB
10倍
ω0
ω
π/2
0
-π/2
C
R
20dB
0dB
-20dB
ω0
ω
π/2
0
-π/2
R
L
20dB
0dB
-20dB
ω0
ω
π/2
0
-π/2
C
R
20dB
0dB
-20dB
ω0
ω
π/2
0
-π/2