

インピーダンスの活用1

交流に対する抵抗(のような)概念としてインピーダンスを習った。

しかし、それがどんな役に立つのか分からなければ、ただのめんどくさい数式でしかない。

ここではインピーダンスを使って共振現象を解析して、その便利さを体験しよう。

共振回路

LとCを含む回路は、特定の周波数で振動しやすいことが分かった。このような、回路を共振回路と呼ぶ。共振回路は発振回路や、無線装置の同調回路に利用される。また、特定の周波数だけを通過させるバンドパスフィルターとしても利用される。

共振現象は、楽器の音の発生、化学物質の光エネルギーの授受、など様々な物理現象にも現れる。

共振の現象

- 携帯電話、1-2GHz

携帯電話は1-2GHzの電波を使って通信している。この周波数の信号だけを取り出すため、アンテナと同調回路があって共振によって電波を取り出す。自分の局と通信できる。

サブ・アンテナ(裏側)
無線LANとBluetooth, GPS用



Liポリマ2次電池

メイン・アンテナ(裏側)
W-CDMA, GSM用



- ギターの弦 数百Hz

特定周波数に共振するので、弾くと決まった音程の音が出る。

- 声でグラスを割る。1k Hzぐらい

ワイングラスの共振周波数で大きな声を出すと、グラスの振動が極端に強まり、最後には声だけで割れてしまう。



共振回路のインピーダンス

LRC直列共振回路のインピーダンスを計算してみよう。電流*i*が共通、電圧が各素子の和になるので、インピーダンス*Z*もそれぞれの和になる。

$$Z = j\omega L + R + 1/j\omega C$$

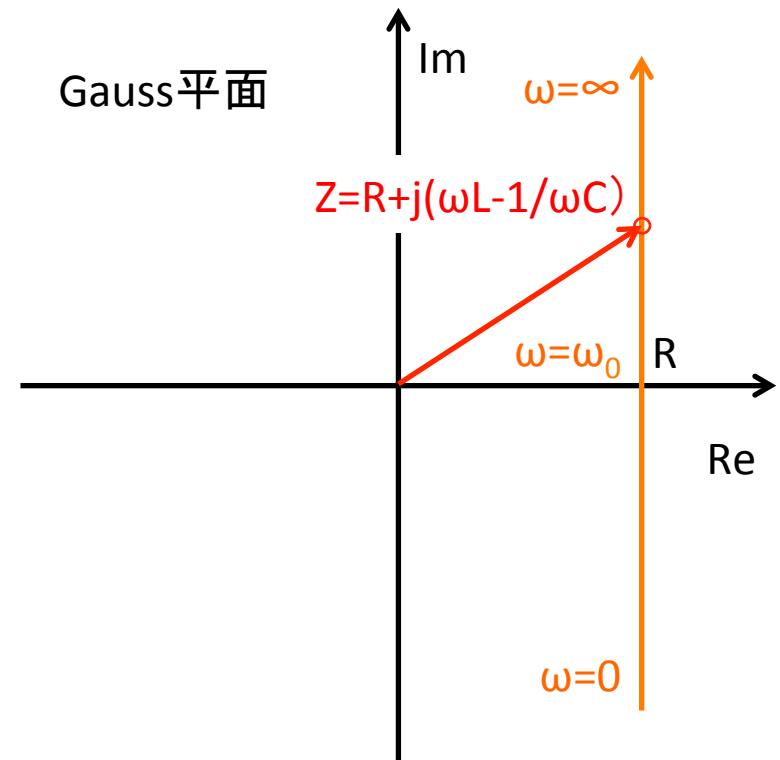
$$= R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

インピーダンスの絶対値はリアクタンスが0のときに最小になる。

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

この時の周波数 ω_0 を共振周波数と呼ぶ。共振周波数では、同じ交流電源電圧に対して、回路に最大の電流が流れる。



抵抗を含む回路の共振

抵抗を含む回路でも、外部から強制振動させた場合は、LとCで決まる共振周波数で最大の電流が流れ、 ω_0 で共振が起きるが、電源を切った場合の減衰振動では、抵抗によって振動の周波数が低周波側にシフトする。

$$j\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4(L/C)}}{2L}, j\omega_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4(L/C)}}{2L}$$

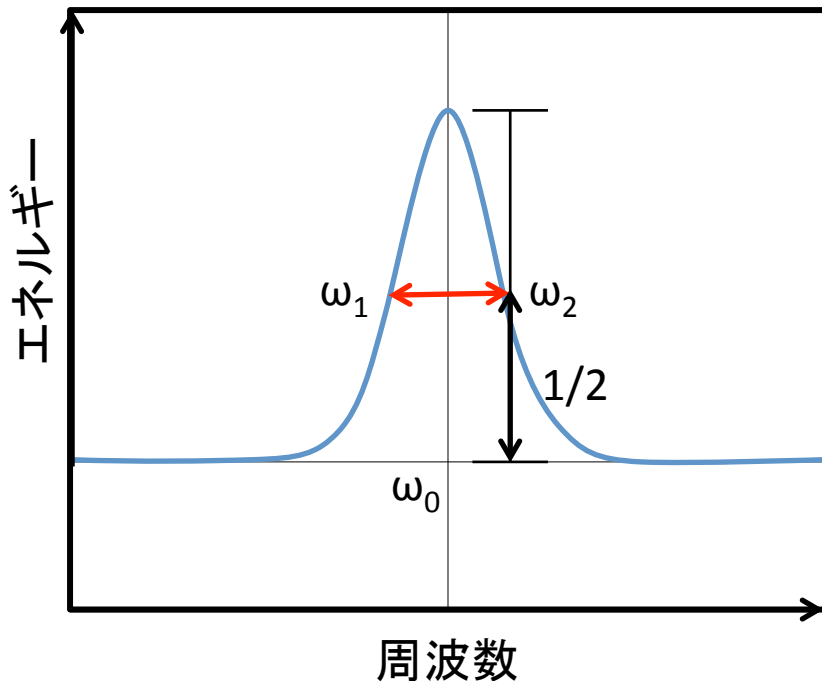
回路に蓄えられるエネルギー量に対して、相対的に抵抗が大きくなると、振動は起こらず単に電流が減衰して0に収束する。

単調減衰になるまでは、抵抗の値と共に周波数は低下し、 $R^2=4L/C$ のときに周波数が0に収束する。このときを臨界減衰とよぶ。

解は2つあるように見えるが、正負の違いで周波数は等しい。

共振のQ

- 共振現象は、特定の周波数に偏っている＝鋭いほど使いやすいことが多い。この鋭さを表すパラメータにQ値がある。Q値とは、共振のピークの幅で共振周波数を割った値である。Qは大きいほど性能がよい。

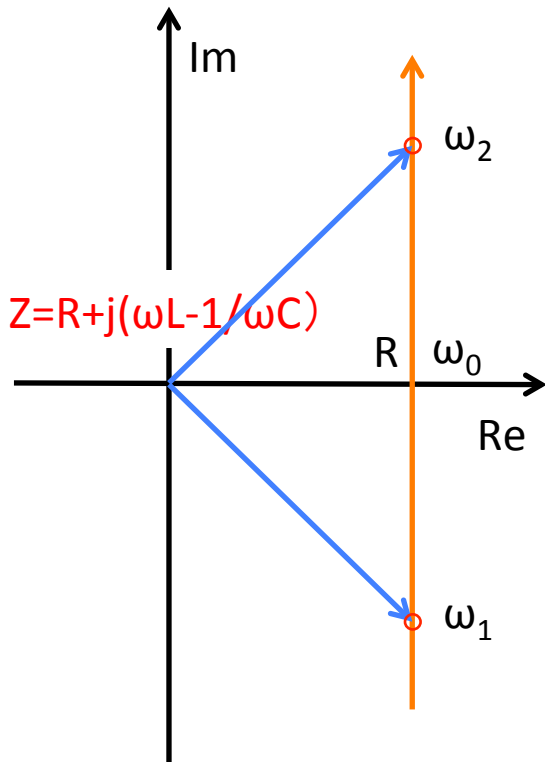


ピークの幅は、電流の大きさが-3dB、すなわちピークの高さの $\sqrt{2}$ 分の1になる位置でとる。

Qの値は、電圧または電流がピークの $\sqrt{2}$ 分の1になる周波数 ω_1 、 ω_2 の差で共振周波数 ω_0 を割った値になる。

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

Qと抵抗



1/√2の周波数では、
 $R = \pm(\omega L - 1/\omega C)$
 この時位相角は $\pm\pi/4$

電流が1/√2、すなわちインピーダンスが√2倍のとき、インピーダンスの虚部と実部の大きさは一致する。

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

この解 ω は、

$$\omega = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}, \omega = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC},$$

であるが、周波数は正の値しかないので、

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}, \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC},$$

となる。よって、周波数の差 $\Delta\omega$ は

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

で、Qの定義に共振周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ を代入すると

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

となる。

結果として、Qは共振点 ω_0 における抵抗(R)とリアクタンス成分($\omega_0 L = 1/\omega_0 C$)の比($\omega_0 L/R$)で、抵抗成分が小さいほど共振は鋭くなる。

電力

- 電圧 v は力の大きさ、電流 i はそれによって流れる電荷の量。その積は単位時間に消費されるエネルギー(仕事率)＝電力 W (ワット= J/sec)になる。

$$W=vi$$

物体の運動：力×速度＝仕事率 $W=f \cdot v$

流体の運動：(圧力×流速)×面積＝仕事率 $W=(p \cdot v)S$

と同様の関係。

- 抵抗では仕事は熱に変わり、散逸するが、キャパシタ・インダクタでは電荷の形で素子に保存され、エネルギーとして返ってくる。

有効電力と無効電力

損失分の電力は他のエネルギーに変わるので、外部に効力を有する有効電力と呼ぶ。それは熱となったり、モーターの駆動力になったりする。

一方、純粋なキャパシタ・インダクタの電力は回路に戻ってくるので外部に抗力を持たず、無効電力と呼ばれる。印加する交流電圧 v を基準としたとき、回路に流れる電流 i は同位相成分 i_1 と90度位相のずれた直交成分 $j i_2$ に分かれる。

$$i = i_1 + j i_2$$

アドミッタンスを $Y = a + jb = Y_0 \exp(-j\theta) = 1/Z_0 \exp(j\theta)$ とすると、

$$i = Y \cdot v = a \cdot v + jb \cdot v = Y_0 \cdot v \{ \cos(\theta) + j \sin(\theta) \}$$

と、電流の位相角はアドミッタンスで決まり、その実部と虚部の割合で、電力は有効電力と無効電力に分かれる。

ここで Y_0 はアドミッタンスの絶対値、 Z_0 はインピーダンスの絶対値、 θ は電流の位相角。

この式から、共振点ではインピーダンスが最小になり、最大のエネルギーが回路に投入されることが分かる。

力率

直列共振回路に一定振幅 V_0 の正弦波電圧 v

$$v = V_0 \exp(j\omega t)$$

を印加したとき、回路に流れる電流 i との積 iv をとれば、回路に投入された電力 W が求められる。

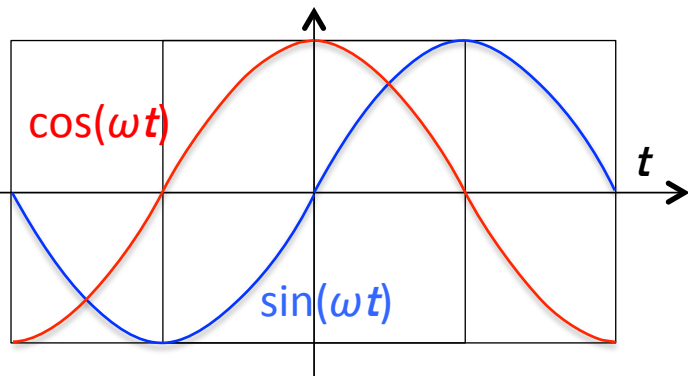
$$\begin{aligned} W = vi^* &= \frac{V_0^2}{|Z_0|} \frac{\exp(j\omega t)\exp(-j\omega t)}{\exp(j\theta)} = \frac{V_0^2}{|Z_0|} \exp(-j\theta) \\ &= \frac{V_0^2}{|Z_0|} (\cos\theta - j\sin\theta) \end{aligned}$$

このうちの有効電力 W_1 は実数部

$$W_1 = \frac{V_0^2}{|Z_0|} \cos\theta$$

で、インピーダンスの偏角 θ で有効電力の割合が決まる。
割合を決める $\cos\theta$ は力率とよばれる。

付録：正弦波の位相

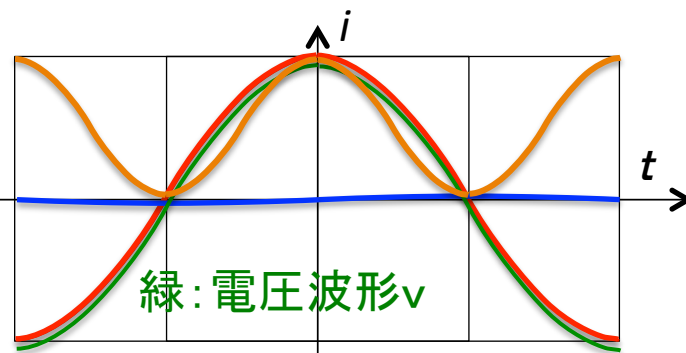


正弦波 $\cos(\omega t + \theta)$ は、位相が θ だけ遅れた $\cos$ 波で、 $\cos$ と $\sin$ の線形結合(適当な比率の和)で表すことができる。

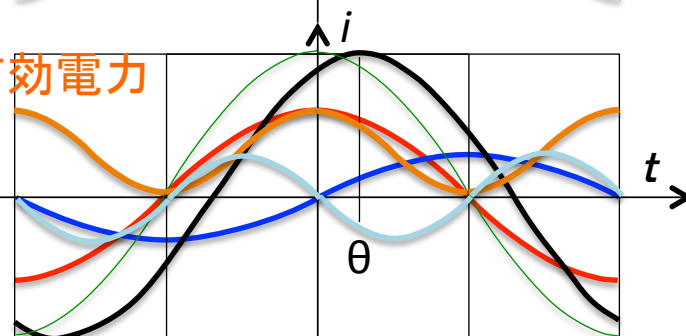
電圧波形との積は電力を表す。同じ位相の橙は有効電力、90度位相のずれた水色は無効電力を示す。

有効電力は平均値が $1/2$ になる(仕事をする)が、無効電力は平均が0(仕事をしない)になる。

$i = \cos(\omega t)$
全て有効電力

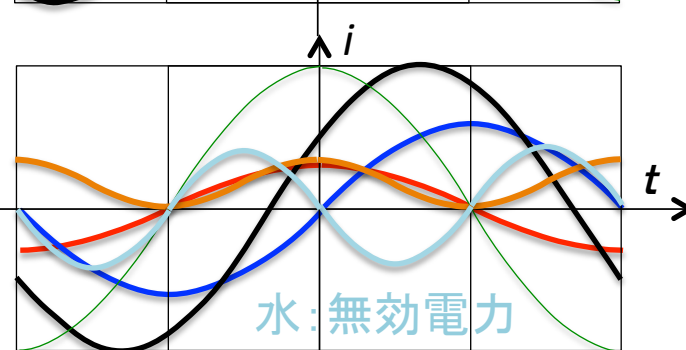


6割ぐらい
有効電力
橙：有効電力



$i = \cos(\omega t + \theta)$
 $= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
 $A = \cos \theta, B = \sin \theta$

3割ぐらい
有効電力



全て無効電力
 $i = \cos(\omega t + \pi/2)$
 $= \sin(\omega t)$

