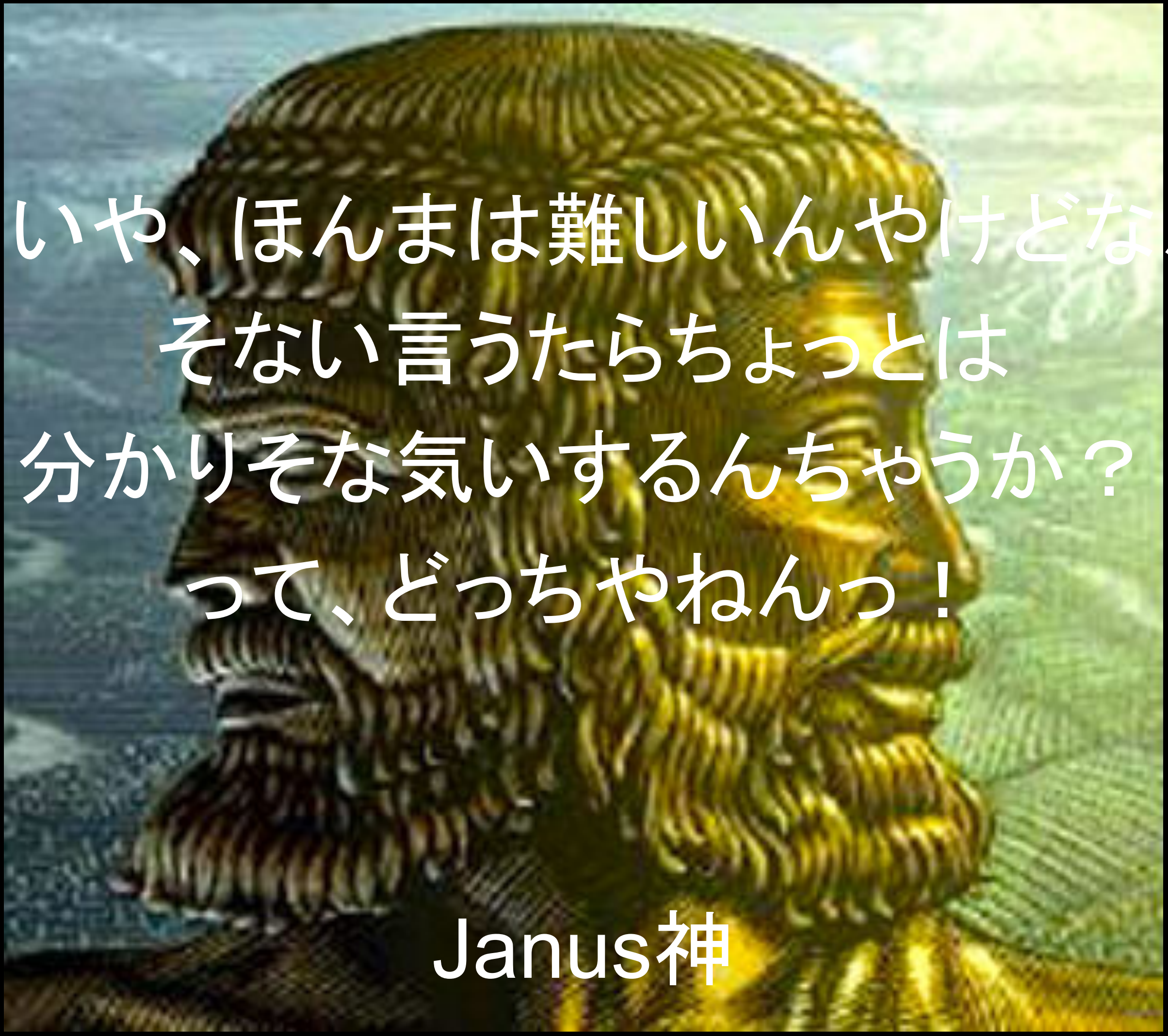
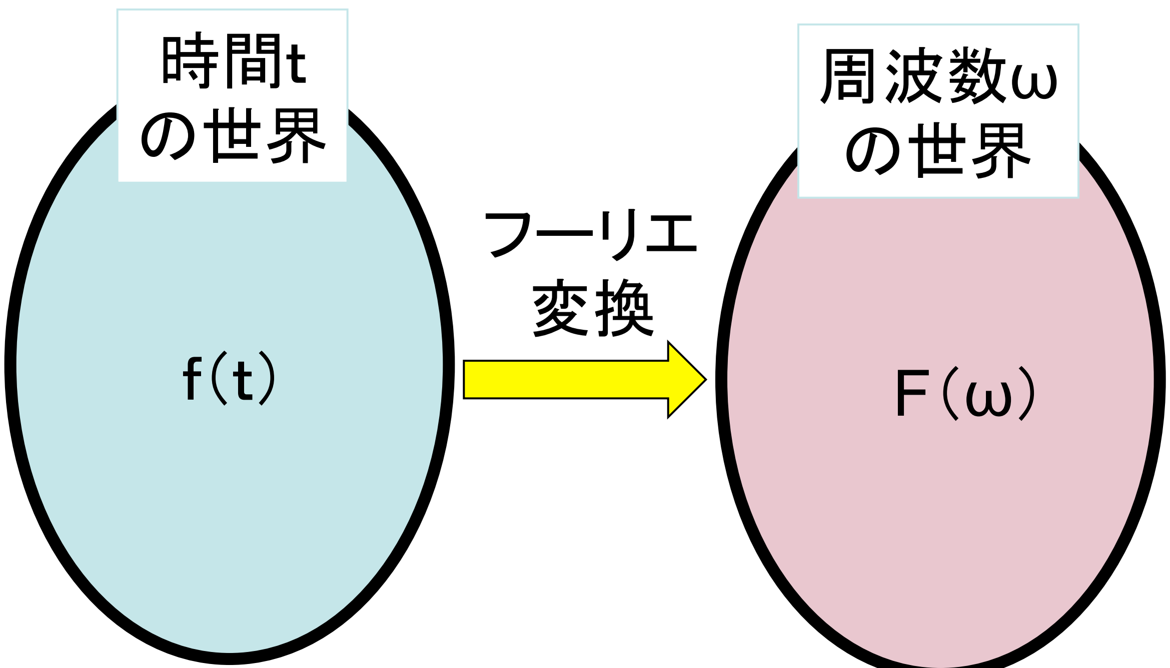
# フーリエ変換おもろいわー！



# そもそもフーリエ変換とは

フーリエ変換とは、
ある時間tの関数f(t)を、周波数ωの関数F(ω)に移す変換。
（正確に言うと面倒なので、ちょっと省いてある。）



# 最初の疑問

そんなに勝手に時間から周波数の世界に移れるの？
だいたい、周波数って何?

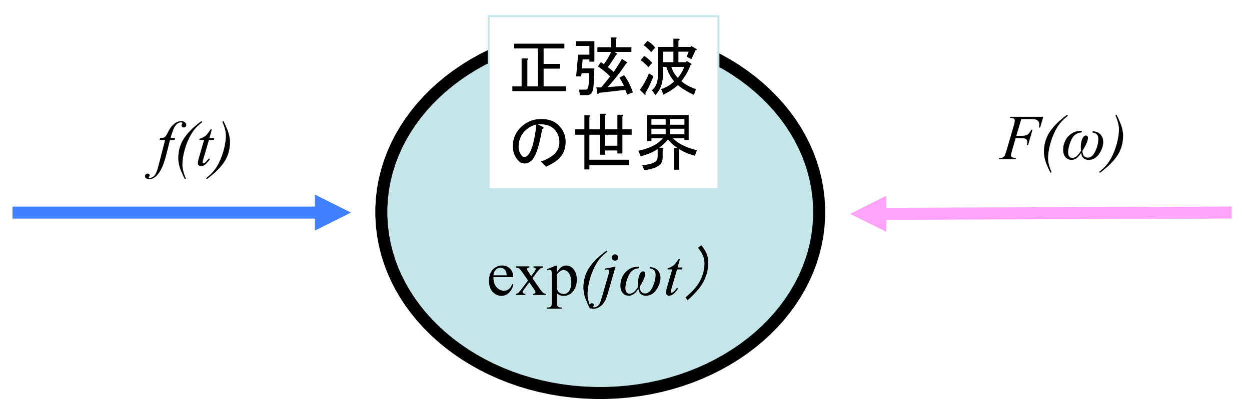
周波数ωは、時間tの共役量です。正確には角周波数。
t × ω は位相変化になります。
　時間：t [sec]
　周波数：ω [2π/sec]
あれ、この関係どこかで見た？
時間とエネルギーの関係、
座標と運動量の関係、
物理現象の進み具合を決めているのは位相変化だった。
波の進み具合を決めるのがtとωの積、位相変化だ。

# 波の式

正弦波を時間関数 $f(t)$と考えると（まあ、十分そうだけど。）こんな式になる。

$A$は振幅で、$\omega$は波の周波数だ。なお、$j$は虚数単位です。
expが正弦波になるのは、オイラーの定理のおかげだ。

この式、よく見ると、$\omega$の関数でもあるんじゃない？
つまり、正弦波には時間関数としての顔と、周波数関数としての顔がある。
だから、どちらの世界から眺めることもできる。
けれど、どちらから見るかによって、違った形に見えてしまうのだ。



# 正弦波以外はどうなるの？

正弦波は時間と周波数の両方の顔を持つことが分かったけれど、てきとうな関数をもってきちゃったらそうはいかないんじゃないの？

そこで、正弦波の直交性と完全性が役に立つ。
正弦波は互いに線形独立である。（直交性）ベクトルと一緒だ。
そして任意の関数は、線形独立な正弦波の和に分解できる。（完全性）

周波数の異なる2つの正弦波$f_1(t)$と$f_2(t)$に対して、

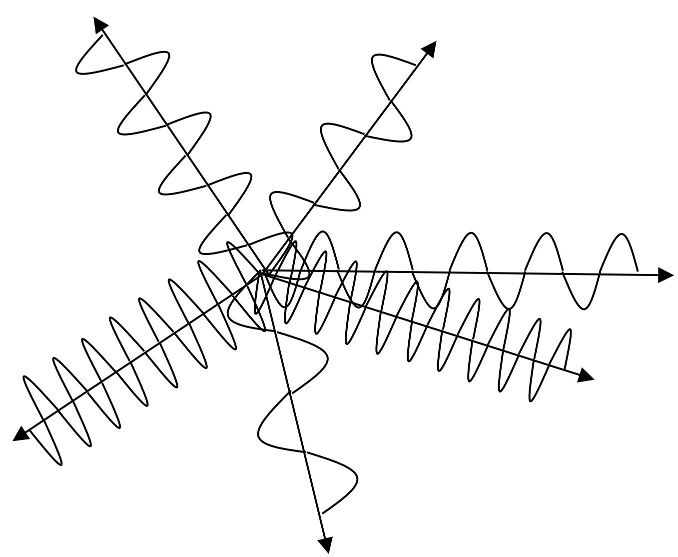
内積Pを次のように定義する。ただし、ここでは2つの正弦波の周波数は整数倍で、共通の周期があり、それをTとする。

するとPは同じ周波数でのみ値を持つ。
（自分で計算してみよう！）

# 直交関数系

任意の関数は、正弦波の和に分解できる。
正弦波には内積が定義できるので、ベクトルのように関数の成分を計算で取り出すこともできる。だから、
どんな関数でも時間と周波数の両方から見ることができる。

実は直交性を持つ関数群を直交関数系と呼び、任意関数の分解に便利に使っている。
たとえば多項式やルジャンドル関数もその例だ。
直交関数系は線形なベクトル空間は張る。



三角関数のベクトル空間

# 時間と周波数の世界を往復

じゃあ実際に、時間の世界から周波数の世界に行くには、どうすればいいの?

時間関数*f(t)*の中から周波数ベクトルの成分を取り出したければ、内積をとればいいじゃない。そうすれば同じ成分だけが残るから。

月に行くよりは簡単そうだ。

# フーリエ変換

フーリエ変換

$$X_{(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j\omega t} dt$$

$x_{(t)}$

時間関数

$X_{(\omega)}$

周波数関数

フーリエ逆変換

$$x_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

# で、どこがおもしろいの？

１、不確定性原理は当たり前！

２、座頭市はどうして強い？

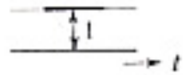
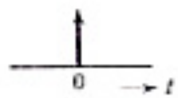
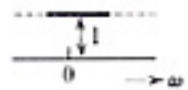
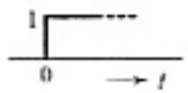
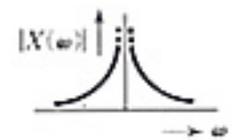
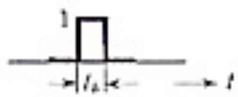
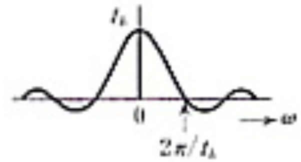
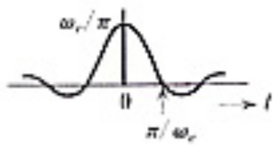
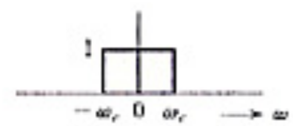
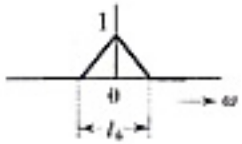
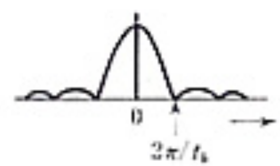
# １、不確定性とは

粒子の存在する位置qと粒子の運動量pは確定できず、ある範囲Δqと Δpの内にあることだけが分かる。
このとき両者の積は必ず一定値(プランク定数h）以上になる。

$$\Delta p \cdot \Delta q \geqq \hbar$$

何で場所と速さが分からんねん！
自分、サボってんちゃうか？

# フーリエ変換された関数の関係

| 関数形 $x(t)$ | | フーリエ変換 $X(\omega)$ | |
|---|---|---|---|
| 1 |  | $2\pi\delta(\omega)$ |  |
| デルタ関数 $\delta(t)$ |  | 1 |  |
| 単位ステップ関数 $u(t)$ |  | $\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ |  |
| 単一方形パルス $w_{t_b}(t)$ |  | $t_b\frac{\sin\left(\frac{\omega t_b}{2}\right)}{\frac{\omega t_b}{2}}$ |  |
| 標本化関数 $\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$ |  | $w_{2\omega_c}(\omega)$ |  |
| 単一三角パルス |  | $\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega t_b}{2}\right)}{t_b\omega^2}$ |  |
| 指数減衰波 $e^{-\alpha t}\cdot u(t)$ | | $\frac{1}{\alpha+j\omega}$ | |
| 余弦波 $\cos\omega_c t$ | | $\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$ | |
| 正弦波 $\sin\omega_c t$ | | $-j\pi[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]$ | |

広がった波は狭い周波数範囲を持ち、狭い波は広い周波数範囲を持つ。

波の広がりと、周波数の広がりの積は一定になりそうだ。

# でも、粒子が波だったら・・・

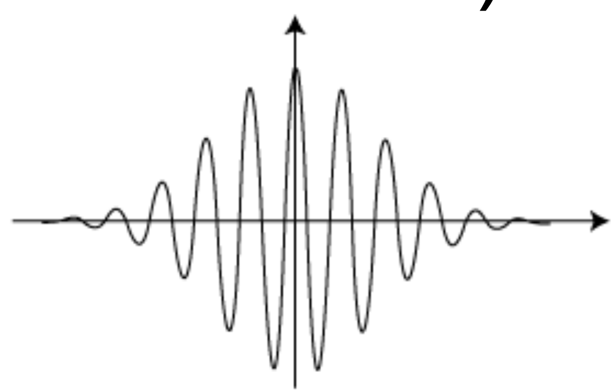
位置はq運動量p=ħkの波束と考えられ、波なので必ず広がりΔqがある。
そして幅Δqに広がった波のフーリエ変換は、幅Δkの周波数の広がりを持ち、ΔqとΔkの積は1になる。

　$\Delta q \cdot \Delta k \geqq 1$(フーリエ変換の性質)

両辺にħをかけると、

　$\Delta p \cdot \Delta q \geqq \hbar$

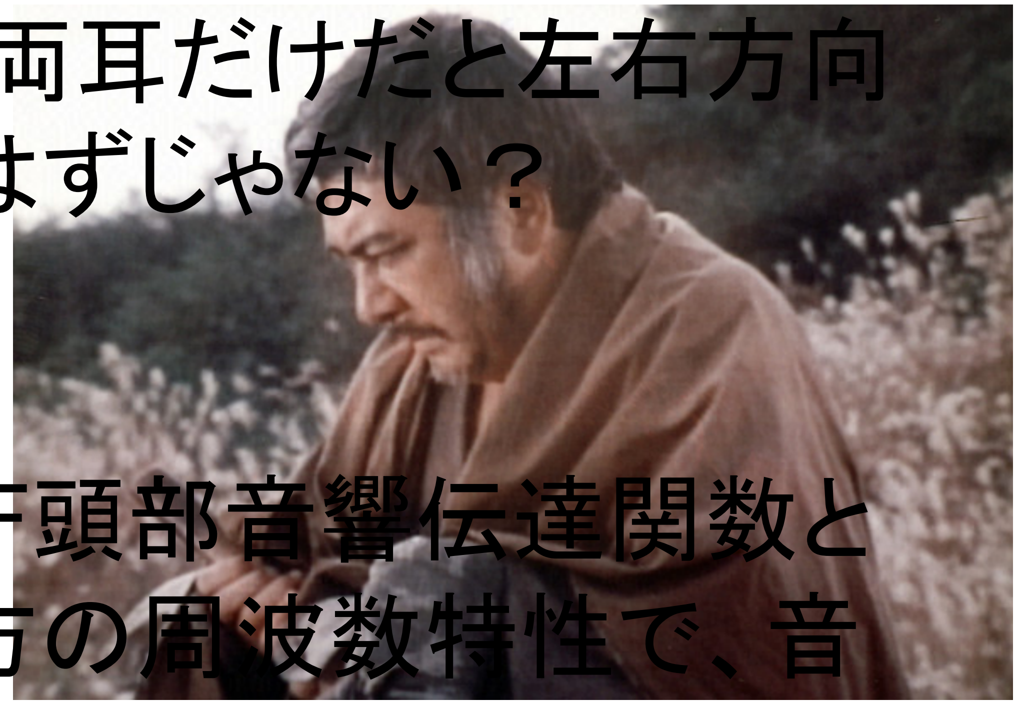
が出てくる。



波束

## ２、座頭市は

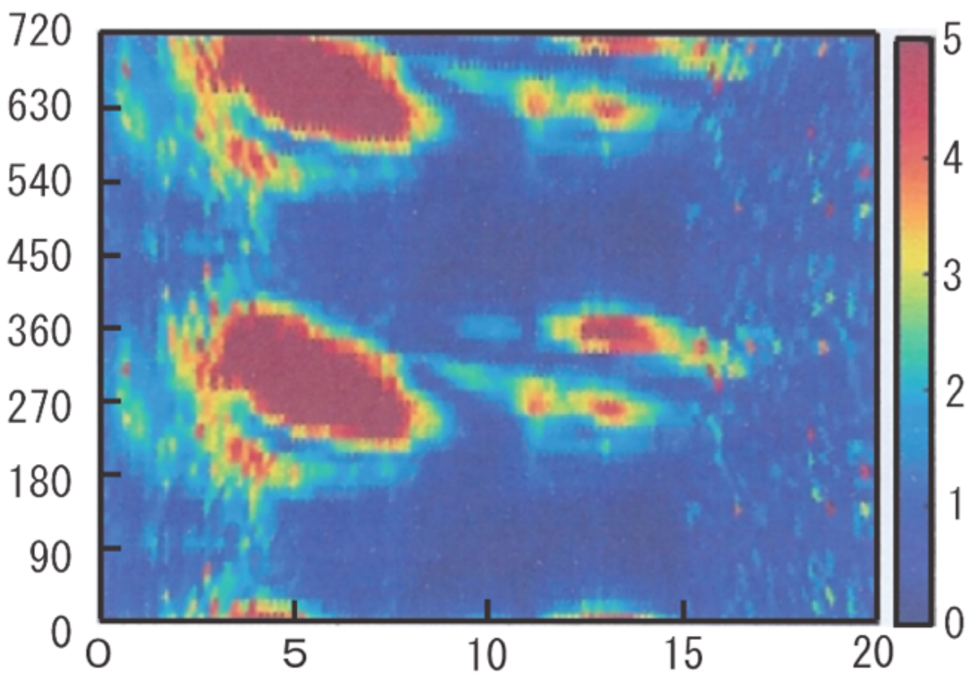
両耳だけで音源位置を知り、刀をよけ、敵を切る。でも、両耳だけだと左右方向しか分からないはずじゃない？



実は、人はHRTF頭部音響伝達関数という音の伝わり方の周波数特性で、音源の立体位置を検出している。

# HRTF頭部音響伝達関数

頭の形による回折で音の方向をにより周波数特性ができる。




座頭市もHRTFを使って相手の位置を判断していたのだ！
耳がフーリエ変換を必要とする理由の1つ。