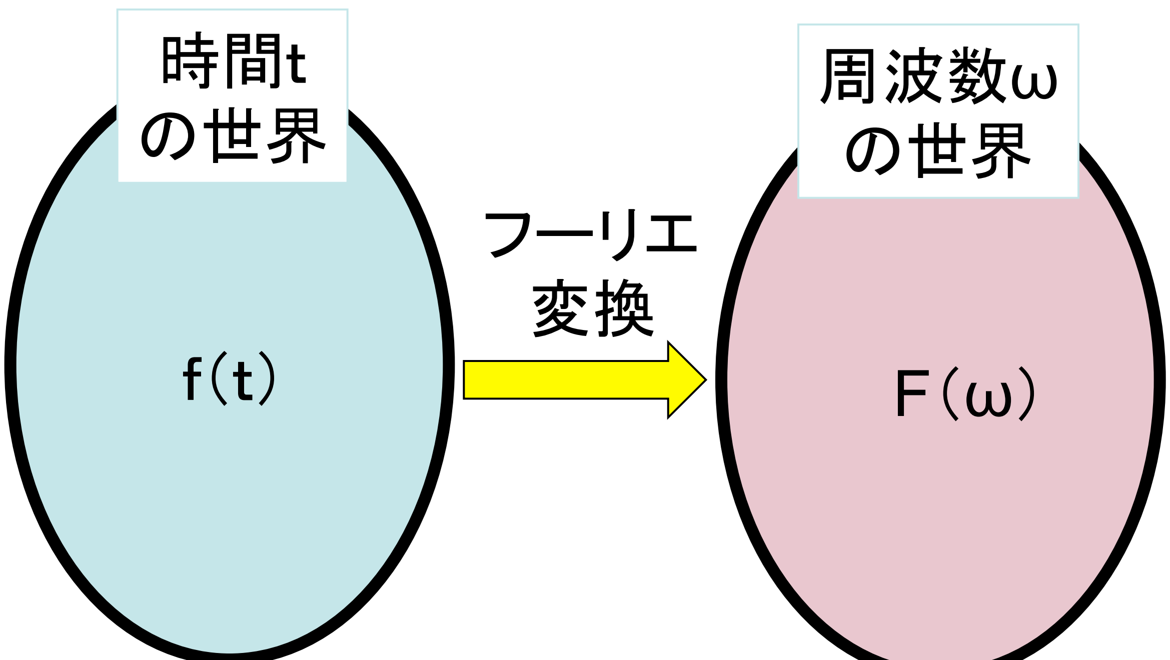
フーリエ変換おもろいわー！

いや、ほんまは
難しいんやけどな、
おもろい言うたら
ちょっとは
分かりそな気い
するんちゃうか？

Janus神

そもそもフーリエ変換とは

フーリエ変換とは、
時間tの関数f(t)を、周波数ωの関数F(ω)に移す変換。
（正確な定義は面倒なので、ちょっと省いてある。）



最初の疑問

そんな好き勝手に時間tから周波数ωの世界に移れるの？
だいたい、周波数って何?

周波数νは、一秒間に波が何個通るか？を表します。ωは正確には角周波数で、一秒間に波の位相が何ラジアン進むかを表します。

$$\omega = 2\pi\nu$$

角周波数ωは、時間tの共役量です。
$t \times \omega$ は位相変化になります。

時間：t [sec]

角周波数：ω [2π/sec]

波は時間と周波数の積によって位相が変わります。

＜オマケの知識＞
量子力学では周波数はエネルギーにあたる。 $E = \hbar\omega$
エネルギーと時間の積が波動関数の位相を進める。

波と周波数

周波数ωの正弦波を時間関数 $f(t)$と考えると、一般にはこんな式になる。

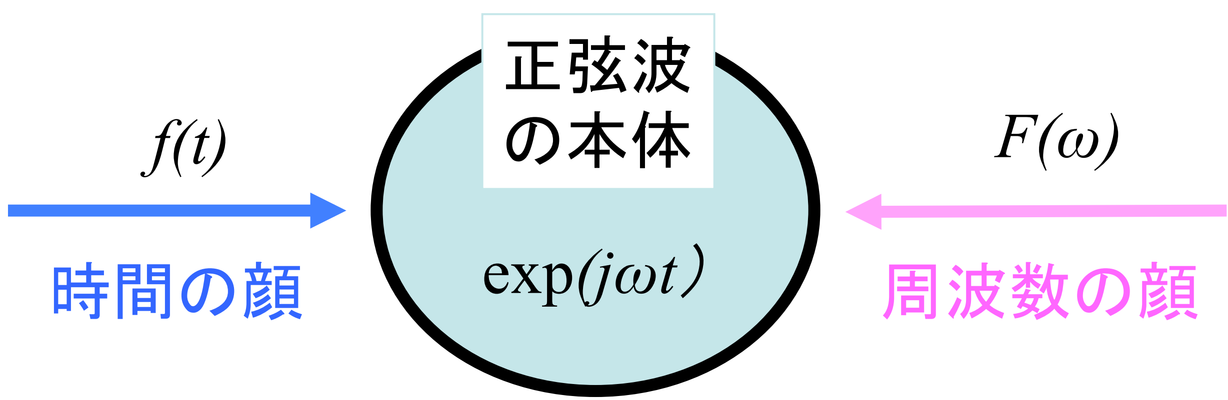
$$f\left(t\right) = A\exp(j\omega t)$$

Aは振幅、jは虚数単位だ。
expが正弦波になるのは、オイラーの定理のおかげだ。

$$\exp(j\omega t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

ところでこの式、よく見ると、ωの関数でもあるじゃない？

つまり、正弦波には時間関数としての顔と、周波数関数としての顔がある。
だから、どちらの世界からも眺めることもできる。
そして、どちらから見るかによって、違った形に見えるのだ。



正弦波以外はどうなるの？

　正弦波は時間と周波数の両方の顔を持つことが分かったけれど、いいかげんな関数の波をもってきちゃったらそうはいかないんじゃないの？

そこで、正弦波の直交性と完全性が役に立つ。

○正弦波は互いに線形独立である。（直交性）
○任意の関数は正弦波の和に分解できる。（完全性）

正弦波の、この2つの性質のおかげで、どんな波でも正弦波の和で表すことが出来る。

正弦波の直交性

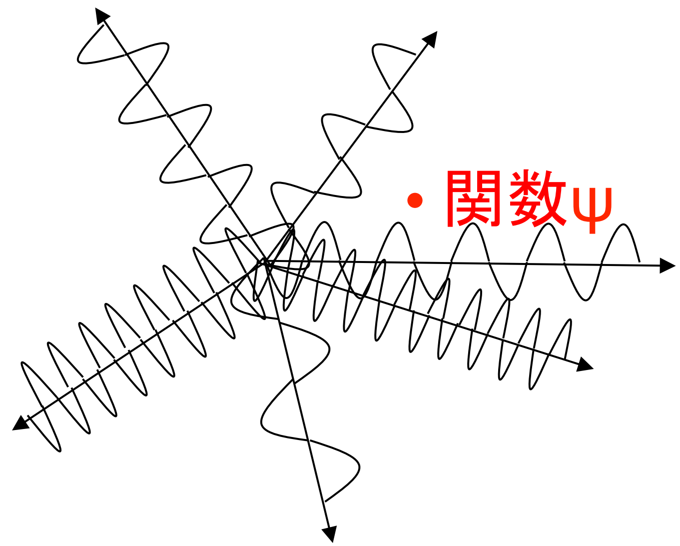
＜直交性＞周波数の異なる2つの正弦波$f_1(t)$と$f_2(t)$

$$f_1 = \exp\left(j\omega_1 t\right) \quad f_2 = \exp\left(j\omega_2 t\right)$$

に対して、内積Pを次のように定義する。結果が実数になるよう、複素共役*を掛けている。

$$P = \frac{1}{T}\int f_1\left(t\right) f_2^{\,*}\left(t\right) dt$$

ただし、ここでは2つの正弦波の周波数は整数倍で、共通の周期Tがあるものとする。するとPは違う周波数では0となり、同じ周波数のみ値1を持つ。
（自分で計算してみよう！）



三角関数が張るベクトル空間。任意の波形の関数ψは、この空間の座標の一点になる。

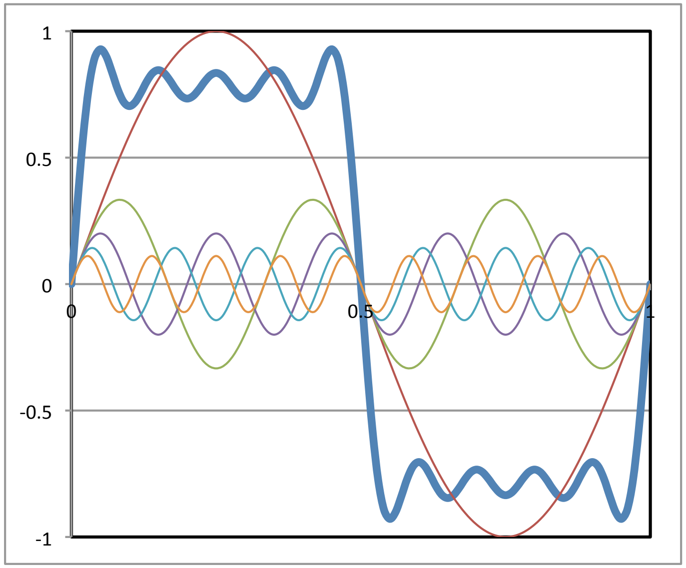
$$P = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ 1 & \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

関数系の完全性

＜完全性＞任意の関数は、正弦波の和に分解できる。
証明は面倒なので、ごめんなさい。

実際に矩形波を三角関数の和で表すと右の図のようになる。任意の周期関数が、三角関数の和に展開できる。

多項式やルジャンドル関数も三角関数のような、完全な直交関数系の例だ。（テイラー展開）



矩形波の三角関数展開

どんな関数でも、正弦波の和に分解することができる。
だから、周波数の両方から見ることができるのだ。

時間と周波数の世界を往復

じゃあ実際に、時間の世界から周波数の世界に行くには、どうすればいいの？

時間関数$f(t)$の中から周波数ベクトルの成分を取り出したければ、内積をとればいいじゃない。そうすれば同じ成分だけが残るから。

月に行くよりは簡単そうだ。

フーリエ級数展開

任意の周期関数ψ(t)は正弦波の和に展開できる。その係数をa_nとする。

$$x(t) = \sum_{n=0} a_n \exp(jn\omega t)$$

つまり、ある関数ωは級数a_nで表すことが出来る。ただし、a_0は定数。
ここで、ψに周波数mωの正弦波を内積する、

$$\frac{1}{T}\int x(t)\exp^*(jm\omega t)dt = \frac{1}{T}\int \sum_{n=0} a_n \exp(jn\omega t)\exp^*(jm\omega t)dt$$

ここで内積が同じ周波数で1、それ以外では0になることを使うと、

$$= \frac{1}{T}\int a_m \exp(jm\omega t)\exp^*(jm\omega t)dt = a_m$$

と、m項のみが残って、係数a_mが取り出せる。

同様に、任意の周期の係数が取り出せるので、内積

$$\frac{1}{T}\int x(t)\exp^*(jm\omega t)dt$$

によって、関数ψを周波数のベクトル空間(a_0,a_1,a_2,・・・)に移すことが出来る。
級数a_nへの展開をフーリエ級数展開と呼ぶ。

フーリエ級数展開の計算

おさらいをしておこう。
時間tの世界から、周波数ωの世界へは、内積

$$a_n = \frac{1}{T}\int x(t)\exp^*(jn\omega t)dt$$

で移動できる。a_nが周波数世界の座標だ。
そして周波数ωの世界から時間tの世界へは

$$x(t) = \sum_{n=0} a_n \exp(jn\omega t)$$

で移動できる。
めでたく皆さんは、時間と周波数の世界を自由に行き来出来るようになったのだ。

周期無限大の関数

フーリエ級数展開は、周期Tの関数にしか適用できなかった。では、周期のない任意関数はどうしてくれるんだ？
そこで、周期Tを無限大にしたらどうだろう？
周期のない関数でも表すことが出来るようになる。
Tが無限大になると、周波数ωは0に近づく。
a_nは連続関数X(ω)になる。（1点の幅は1/Tで0）

$$a_n = \frac{1}{T}\int x(t)\exp^*(jn\omega t)\,dt \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp^*(j\omega t)\,dt$$

周波数nωの間隔は無限小になるので和Σは微小周波数dωについての積分になる。

$$X(t) = \sum_{n=0} a_n \exp(jn\omega t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\exp(jn\omega t)\,d\omega$$

一周すると元に戻るように周波数から時間では2πで割る。

フーリエ変換

フーリエ変換

$$X_{(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j\omega t} dt$$

$x_{(t)}$

時間関数

$X_{(\omega)}$

周波数関数

フーリエ逆変換

$$x_{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

で、どこがおもしろいの？

１、不確定性原理は当たり前！

２、座頭市はどうして強い？

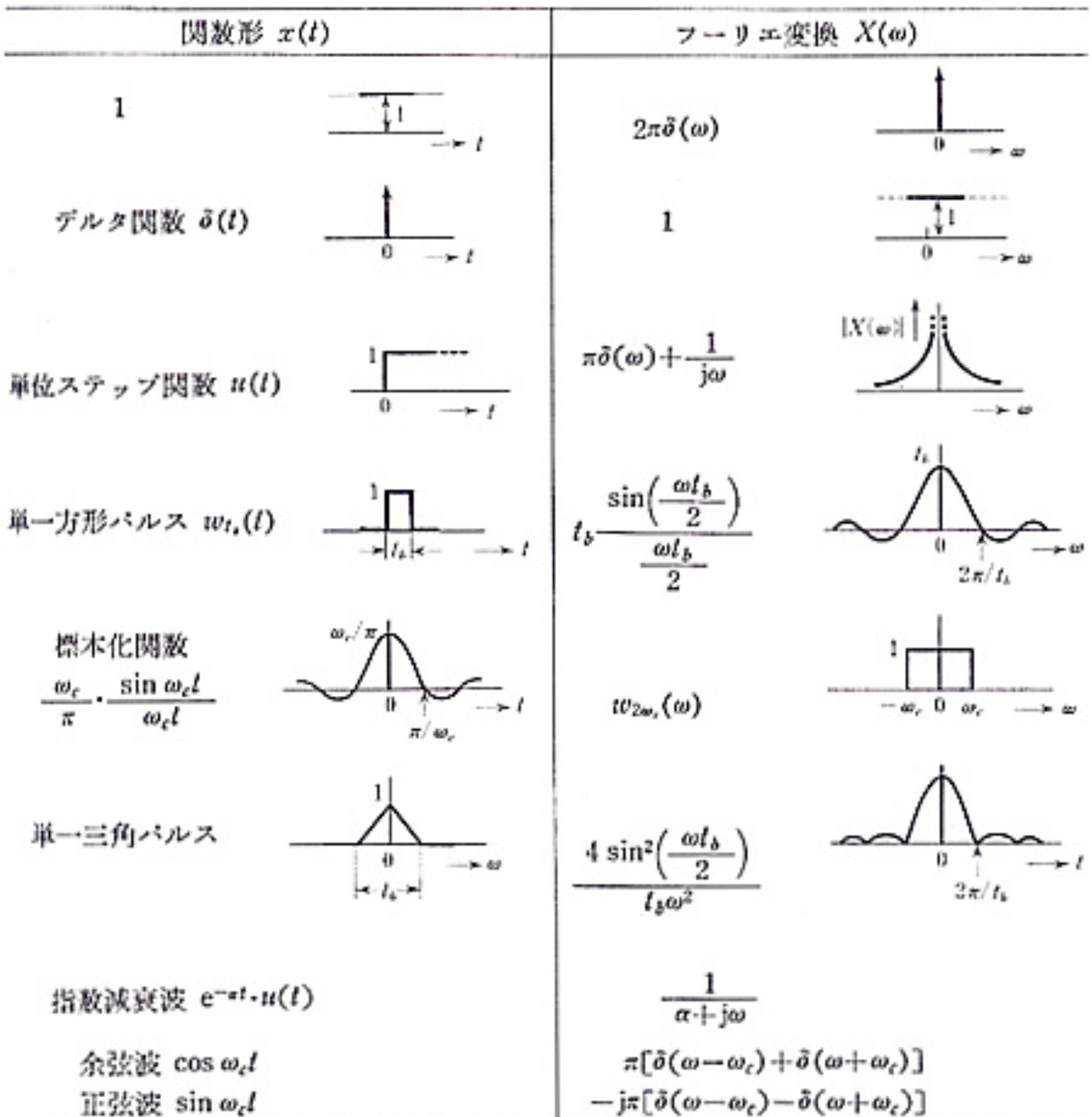
1、不確定性とは

粒子の存在する位置qと粒子の運動量pは確定できず、ある範囲ΔqとΔpの内にあることだけが分かる。
このとき両者の積は必ず一定値(プランク定数h）以上になる。

$$\Delta p \cdot \Delta q \geqq \hbar$$

何で場所と速さが分からんねん！
自分、サボってるんちゃうか？

フーリエ変換された関数の関係



関数形 $x(t)$	フーリエ変換 $X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
デルタ関数 $\delta(t)$	1
単位ステップ関数 $u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
単一方形パルス $w_{t_b}(t)$	$t_b\frac{\sin\left(\frac{\omega t_b}{2}\right)}{\frac{\omega t_b}{2}}$
標本化関数 $\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$	$w_{2\omega_c}(\omega)$
単一三角パルス	$\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega t_b}{2}\right)}{t_b\omega^2}$
指数減衰波 $e^{-\alpha t}\cdot u(t)$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
余弦波 $\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$
正弦波 $\sin\omega_c t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]$

広がった波は狭い周波数範囲を持ち、狭い波は広い周波数範囲を持つ。

波の広がりと、周波数の広がりの積は一定になりそうだ。

でも、粒子が波だったら・・・

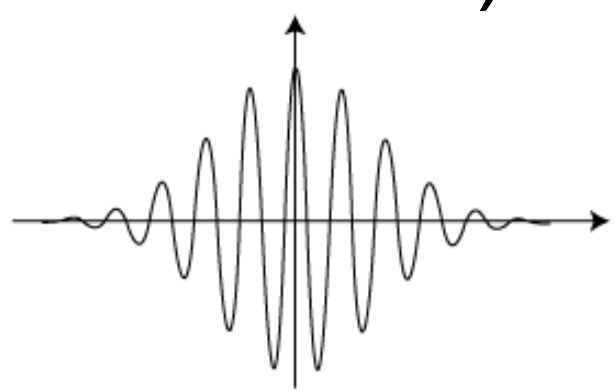
位置はq運動量p=ħkの波束と考えられ、波なので必ず広がりΔqがある。
そして幅Δqに広がった波のフーリエ変換は、幅Δkの周波数の広がりを持ち、ΔqとΔkの積は1になる。

$\Delta q \cdot \Delta k \geqq 1$(フーリエ変換の性質)

両辺にħをかけると、

$\Delta p \cdot \Delta q \geqq \hbar$

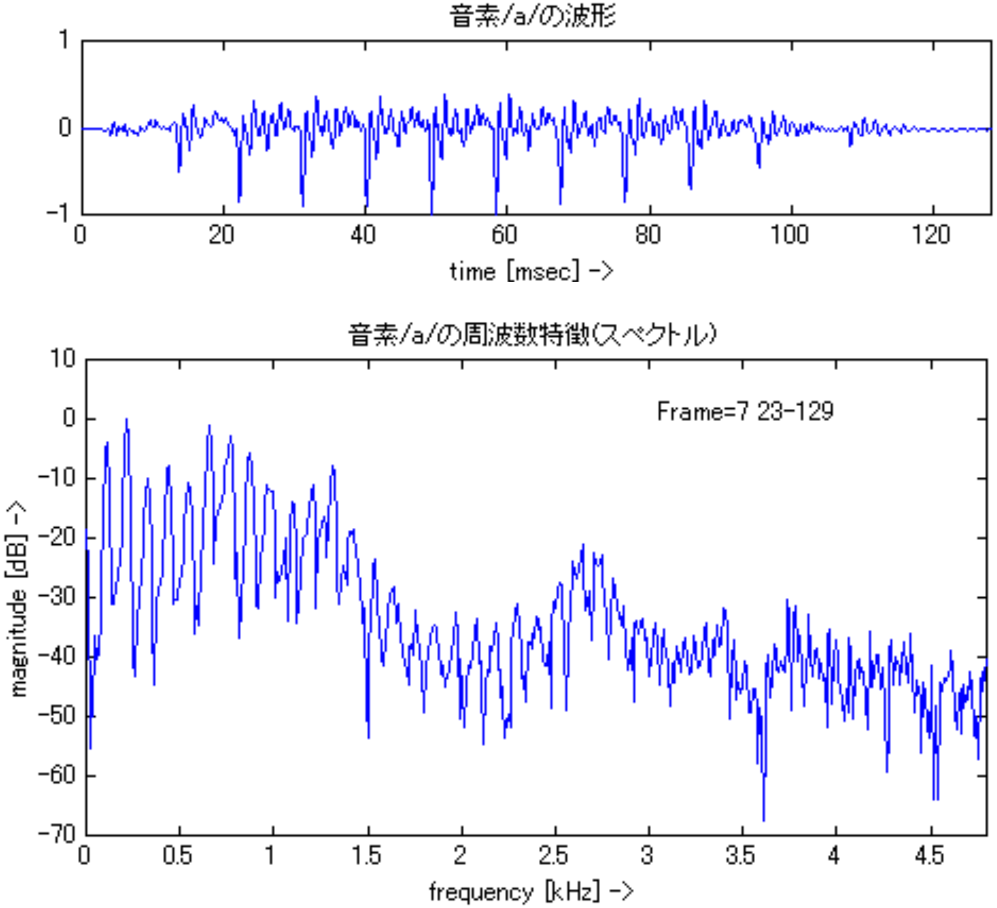
が出てくる。



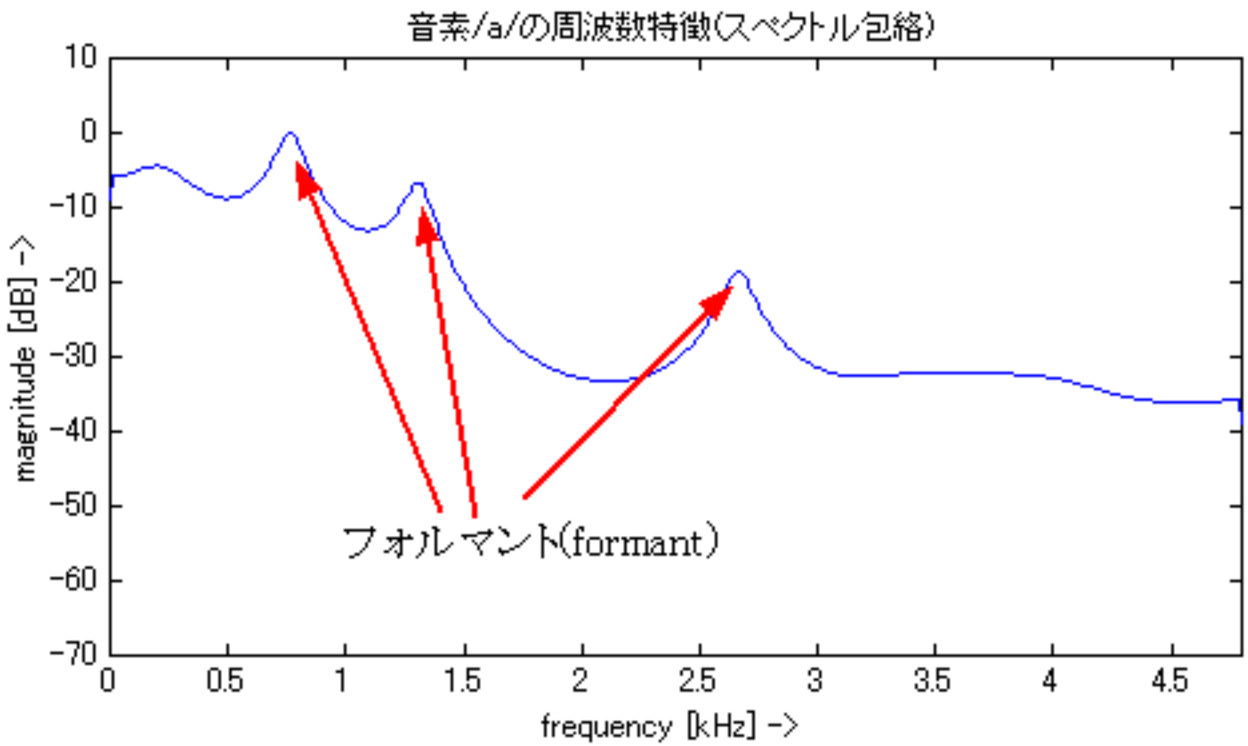
波束

1.9、人の声の周波数分析

座頭市の前に

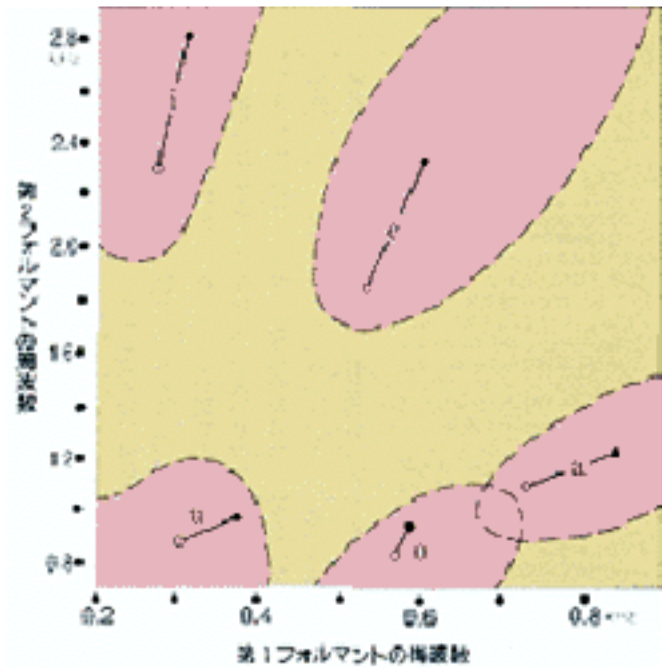


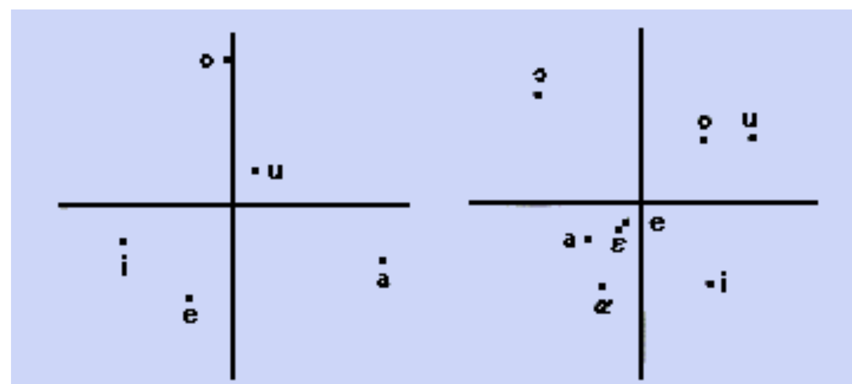
スペクトル包絡


音素/a/の周波数特徴(スペクトル包絡)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
magnitude [dB] ->
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
frequency [kHz] ->
フォルマント(formant)

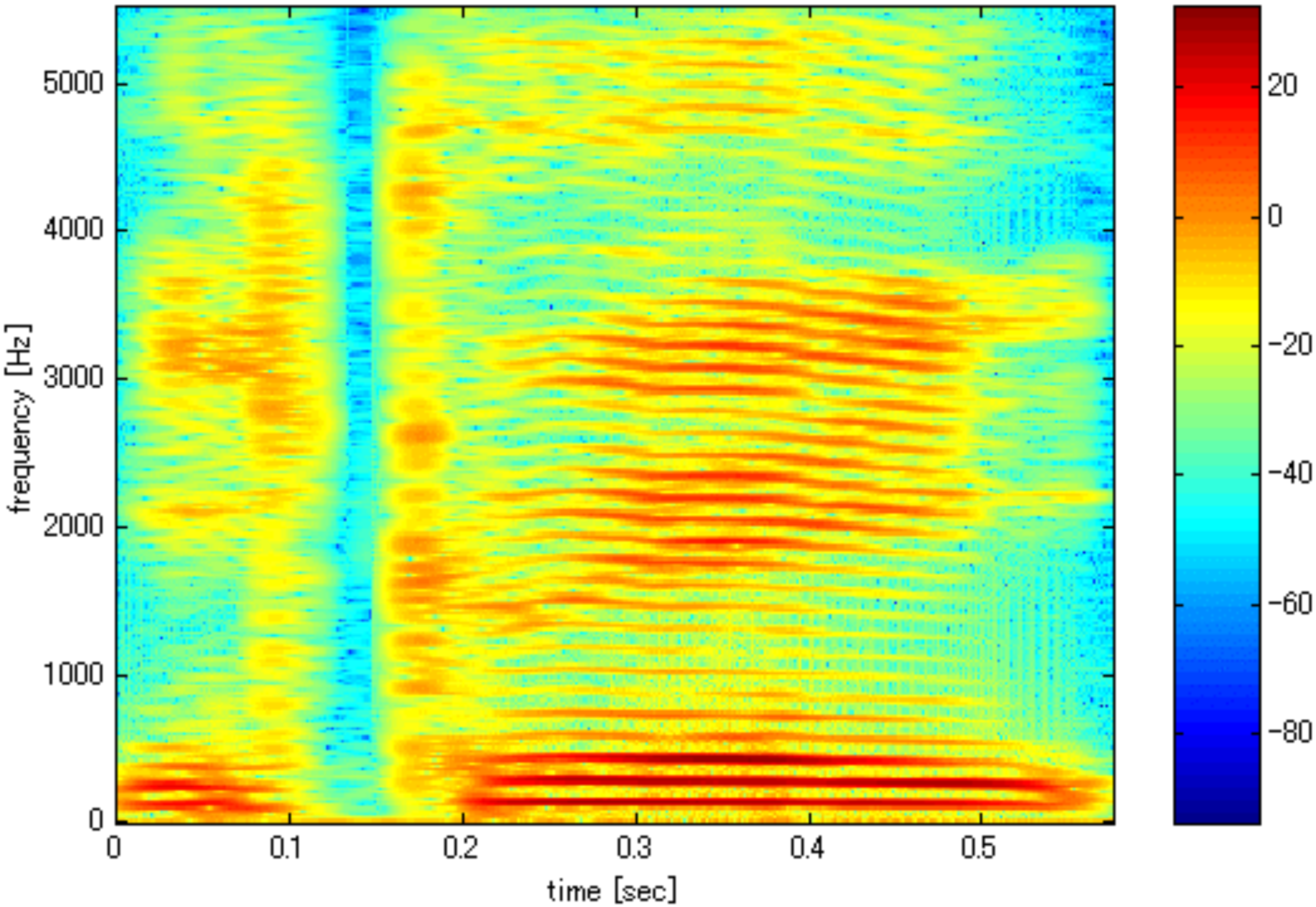
母音のフォルマント

第1、第2フォルマントによる母音の分類

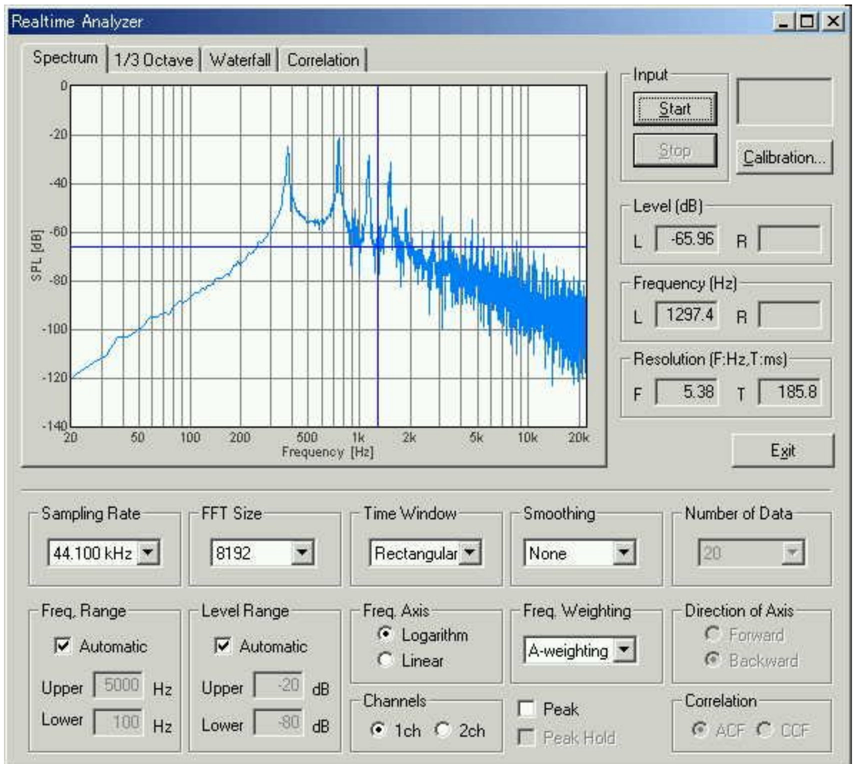




サウンドスペクトログラム（声紋）



パワースペクトラム



エネルギーの含まれる割合

コンボリューション

音声信号 → 自己相関関数

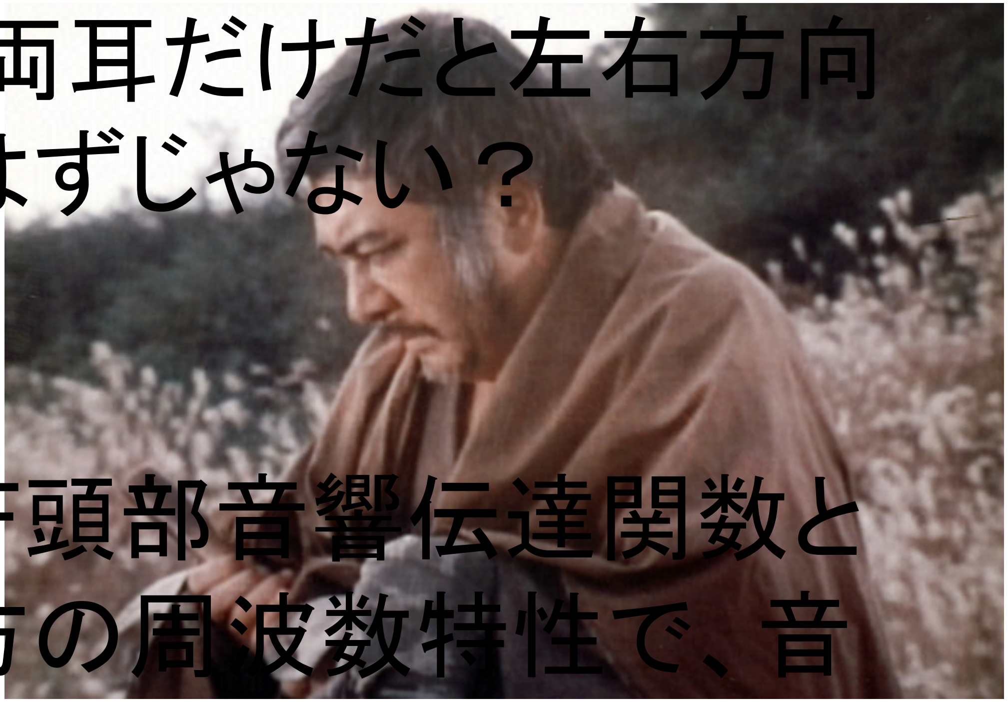
FFT ↓　　↓ FFT

スペクトル → パワースペクトラム

2乗

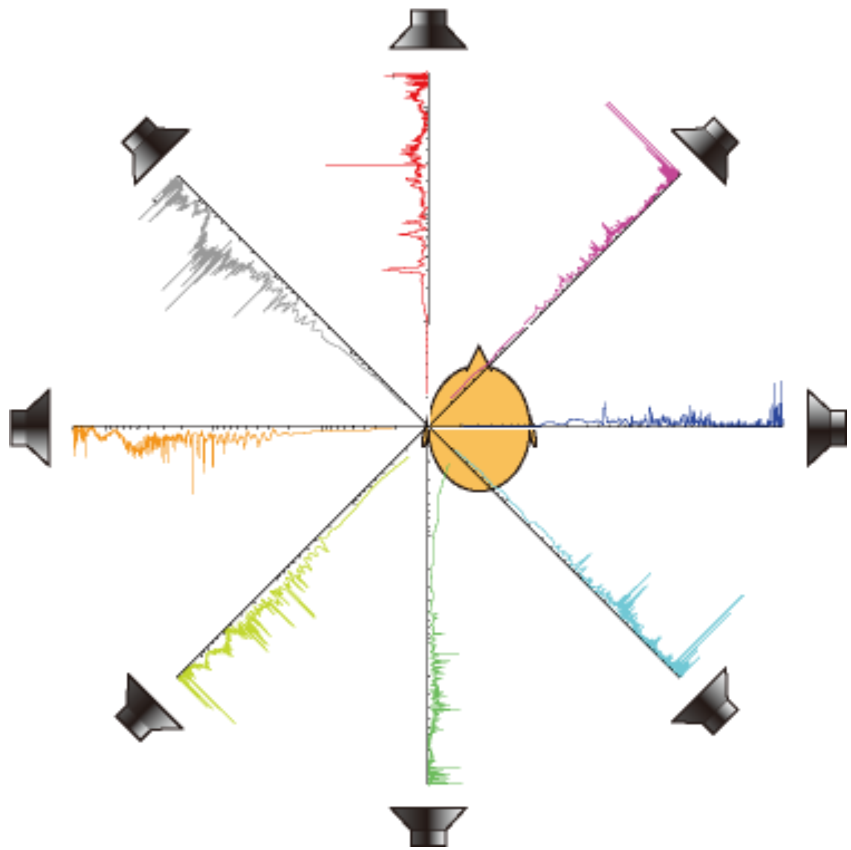
２、座頭市はなぜ強い

両耳だけで音源位置を知り、刀をよけ、敵を切る。でも、両耳だけだと左右方向しか分からないはずじゃない？



実は、人はHRTF頭部音響伝達関数という音の伝わり方の周波数特性で、音源の立体位置を検出している。

頭部音響伝達関数HRTF



HRTFの求め方

矩形波信号

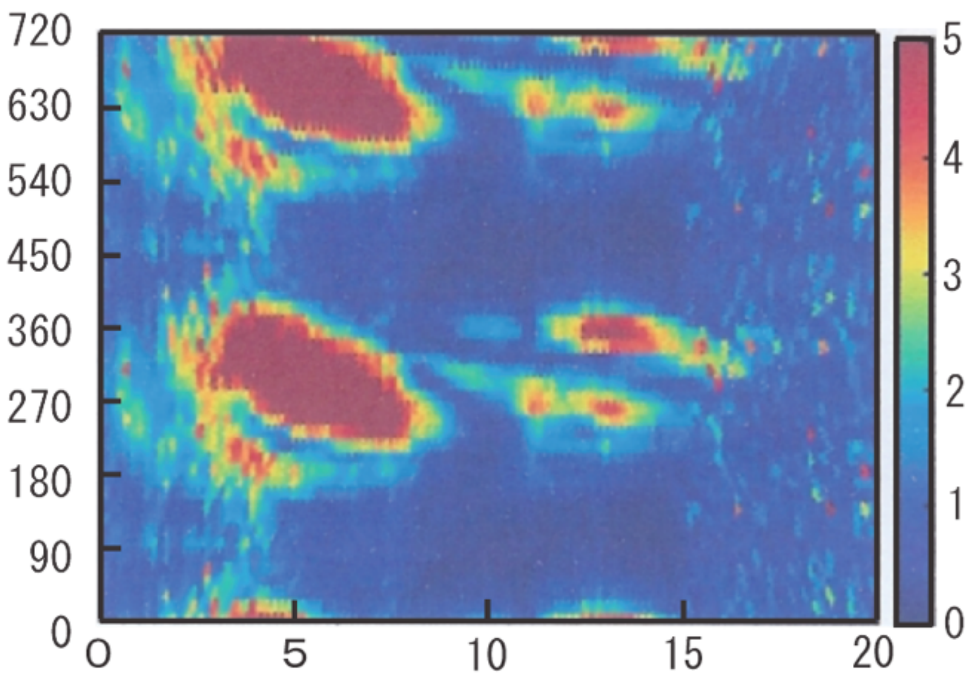
原信号a（頭部在り）
微分
インパルス応答α
FFT
周波数スペクトルA

原信号b（頭部なし）
微分
インパルス応答β
FFT
周波数スペクトルB

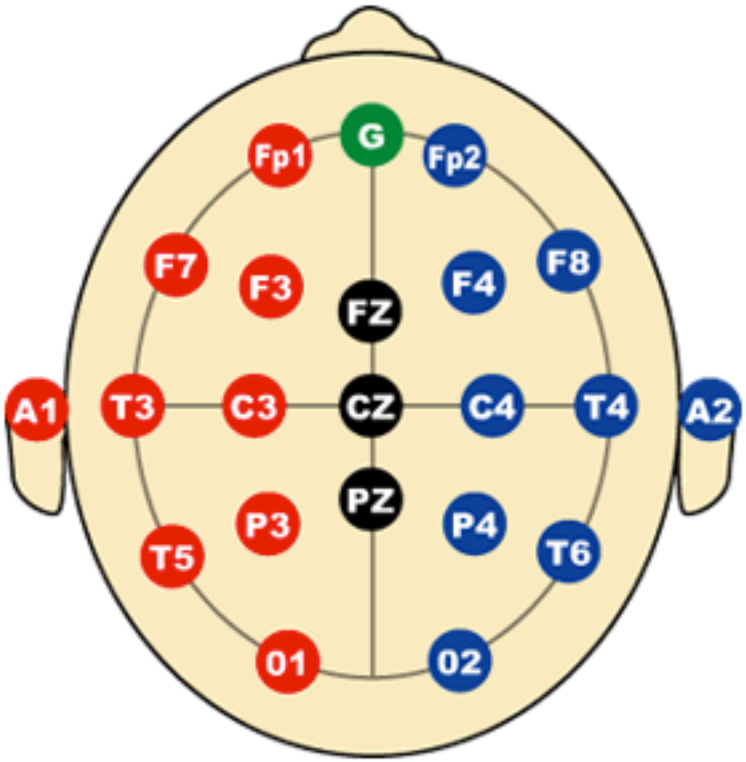
A/B
頭部音響伝達関数
IFFT
頭部インパルス応答

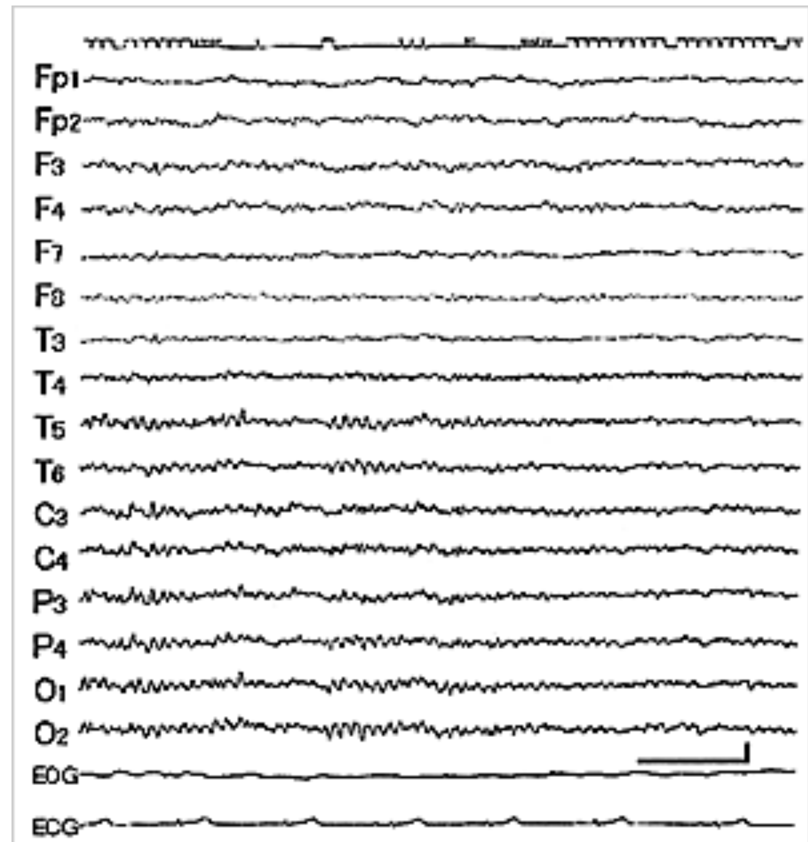
HRTF頭部音響伝達関数

頭の形による回折で音の方向をにより周波数特性ができる。座頭市もHRTFを使って相手の位置を判断していたのだ！
耳がフーリエ変換を必要とする理由の1つ。



その他の応用
その1：脳波(EEG)





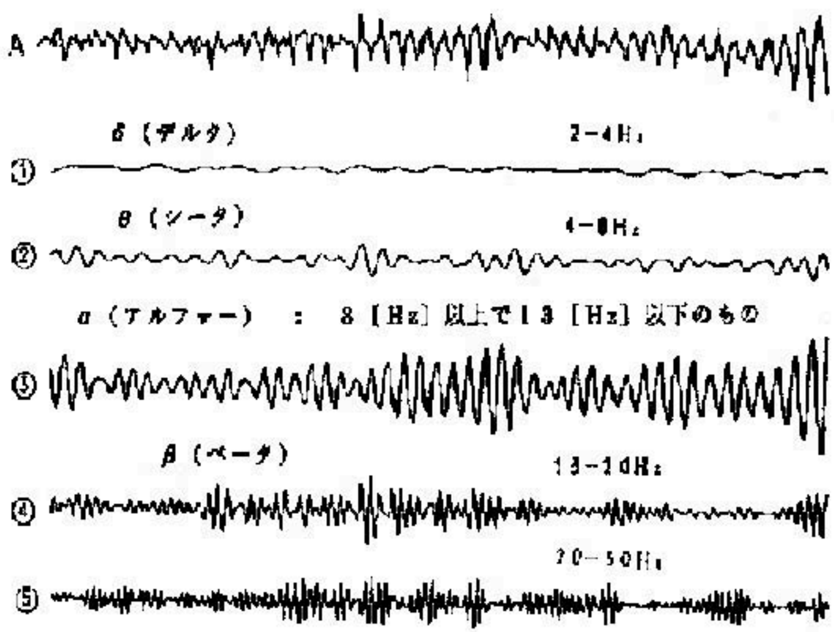
脳波の周波数

δ（デルタ）　：４（Hz）未満の周波数成分をデルタ波と呼びます。

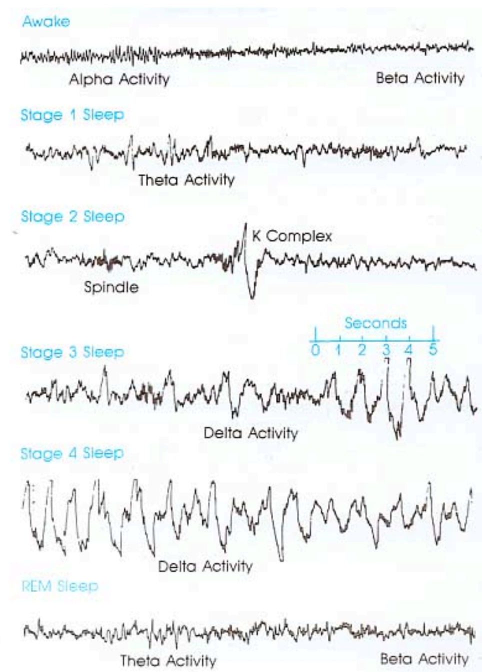
θ（シータ）　：４～８（Hz）の周波数成分をシータ波と呼びます。

α（アルファ）：８～１３（Hz）の周波数成分は、α波と呼び、リラックスした状態。

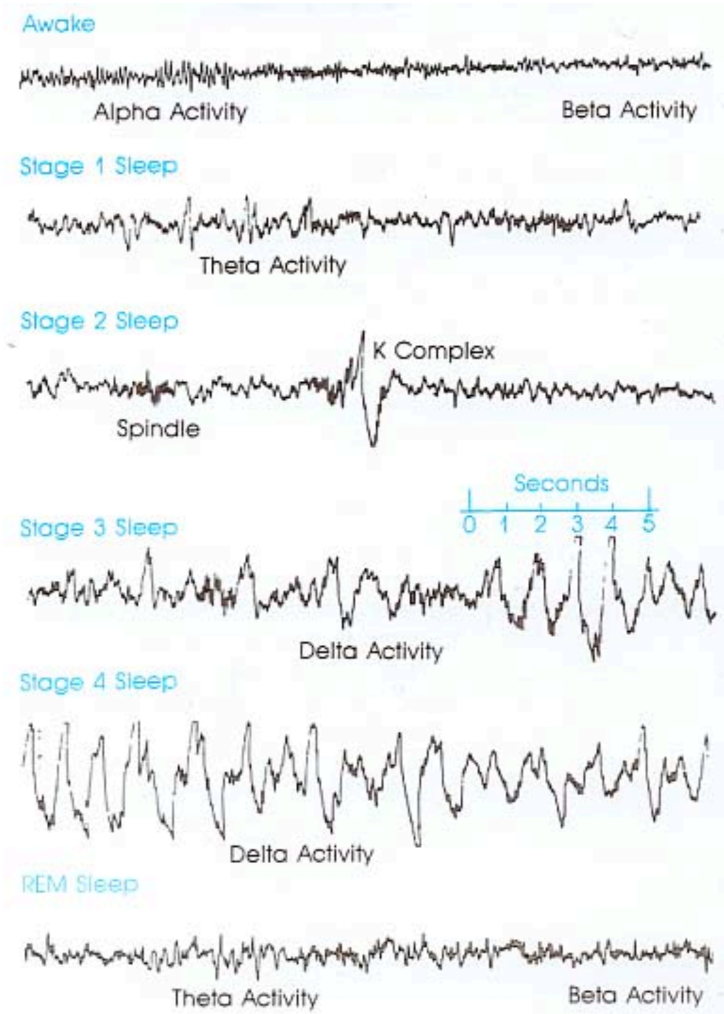
β（ベータ）　：１３（Hz）以上の周波数成分で、ベータ波と呼び、覚醒状態。



（国際脳波学会用語委員会による分類）



睡眠脳波



α波
（覚醒）
θ波（浅い眠り）
スピンドル、
Kコンプレックス
（やや深い眠り）
δ波（深い眠り）

その2、コンピュータ・トモグラフィ