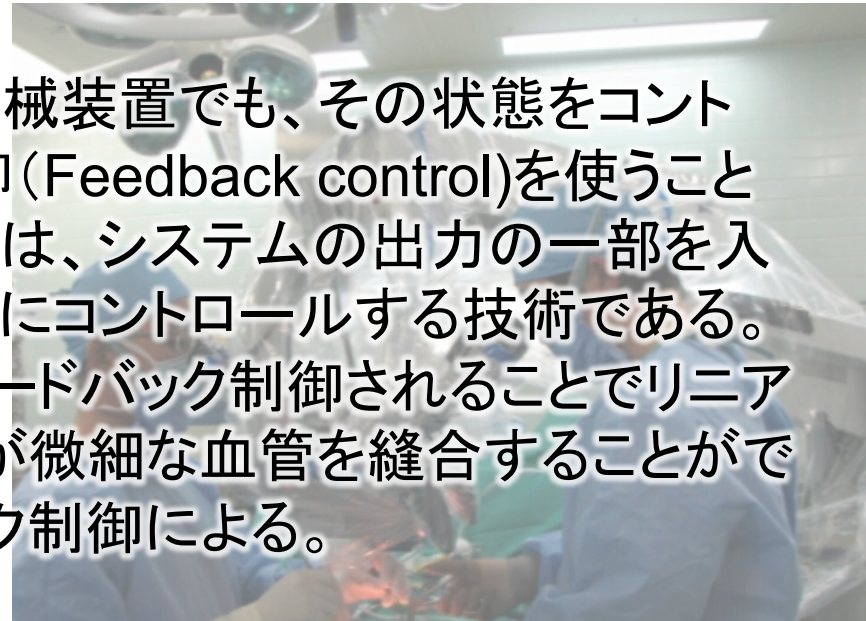


補足：フィードバック制御

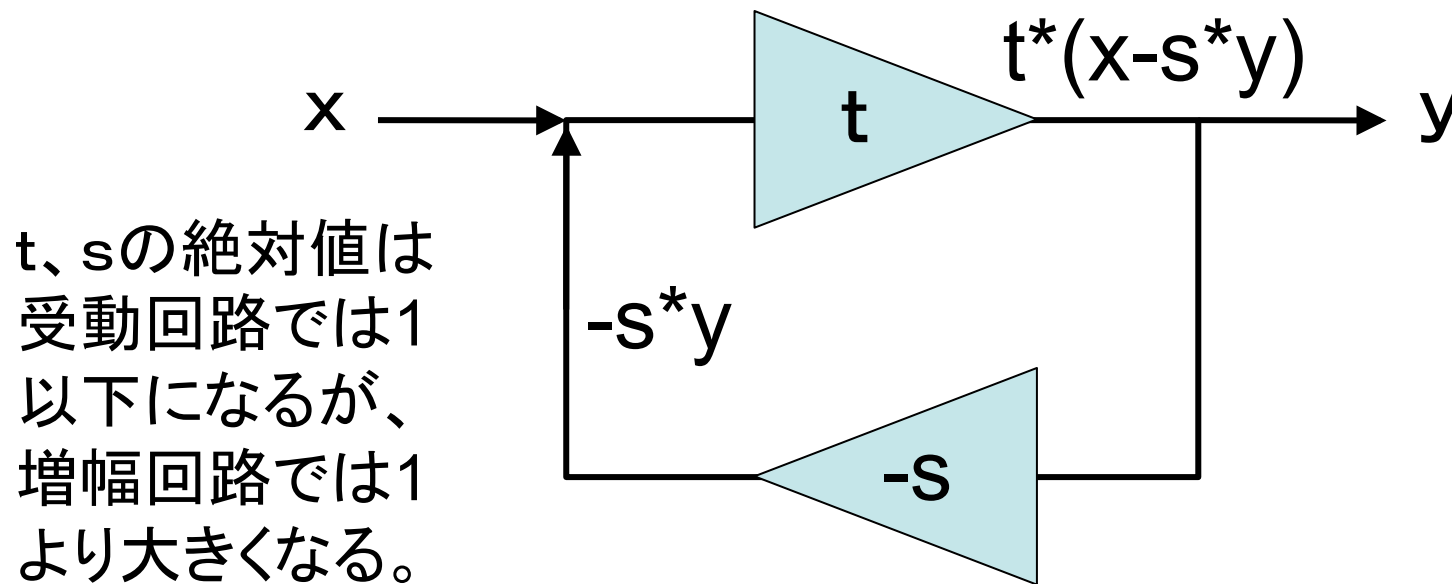
単細胞から多細胞の生物まで、動物・植物・その他の違いを問わず、生体は環境に適応するために自分の状態をコントロールしている。それは時としてホメオスタシス(内部環境のパラメータを一定値にしようとする働き)であったり、生体リズム(周期的な行動や周期的な内部環境状態の変化)であったりする。しかし、そこには1つの共通なメカニズムが働いている。

生体に限らず、人工的な電気／機械装置でも、その状態をコントロールするためにフィードバック制御(Feedback control)を使うことは多い。フィードバック・コントロールは、システムの出力の一部を入力に戻すことで、出力の変動を最適にコントロールする技術である。例えばオーディオ機器のアンプもフィードバック制御されることでリニアな特性を保っている。また、外科医が微細な血管を縫合することができるのも、視覚を通したフィードバック制御による。



フィードバックコントロールの概念

入力を x 、出力を y とする。また、システムの伝達関数を t 、フィードバックループの伝達関数を s とする。ネガティブフィードバックでは入力に対して、出力 y を s を通して引き算することで、出力が余りに大きく変化したときに、その変化を抑えるように動作させることができる。*はたたみ込み積分をあらわす。



ネガティブ・フィードバック

$$y = t^* (x - s^* y)$$

$$(1 + t^* s^*) y = t^* x$$

$$t^* s^* = a \frac{d}{dt} + (b-1) + c \int dt$$

$$\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c \right) y = 0$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = Y_1 \exp(\alpha t) + Y_2 \exp(\beta t)$$

出力 y はこの式のように表せる。

$t^* s^*$ は回路のループ増幅率。出力 y に関する積分(I)、比例(P)、微分(D)のそれぞれの項をフィードバックして制御すると、 $t^* s^*$ を左のように置くことができる。

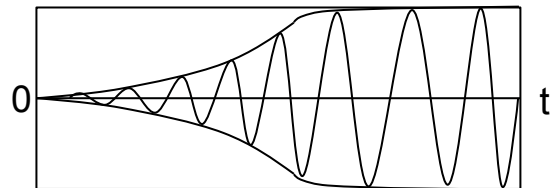
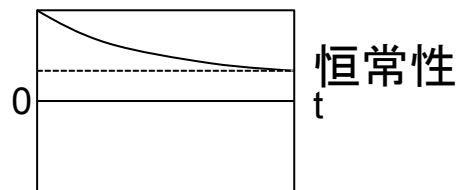
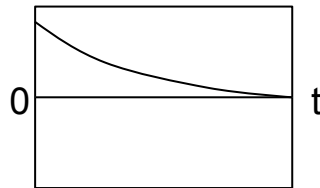
これを代入して両辺を微分。

この微分方程式の解は a, b, c を係数とする二次方程式を解くと容易に得られる。
二次方程式の解を α, β とする。

Y_1, Y_2 を定数として、左の式が解となる。

出力の振る舞い

$$y = Y_1 \exp(\alpha t)$$



リズム動作

指数関数 $\exp$ の解の形は α が実数の場合は減衰または増加、 α が虚数の場合は振動になる。

(I)積分制御($a=0$ 、蓄積物の量がフィードバックされる場合)のとき、 α は $-(c/b)$ なので、0に収束する減衰カーブになる。

(D)微分制御($c=0$ 、変化の速さがフィードバックされる場合)のとき、 α, β は $-(c/b)$ と0なので、定数に収束する減衰カーブになる。

(PID)一般に a, c が0でない場合。 $(b/2a)^2 - c$ ($=\omega$)が負なら振動解が得られる。振動の周波数は ω で、 $-b/2a$ が正なら振動は増加、負ならば振動は減衰する。増加する振動解は、現実には周期動作(発振)になる。

このように、恒常性もリズムも同じフィードバック制御で説明できる。

斉次二階微分方程式の解

さらに補足ではあるが、下の微分方程式を斉次二階微分方程式という。

$$\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c\right)y = 0$$

その解の性質は同じ係数の二次方程式の解 α , β によって支配される。

解関数は必ず α , β を係数として含む指数関数で表せる。

よって解が実数の場合は単調に減衰、または増加するカーブとなる。

$$y = Y_0 \exp(\alpha t), y = Y_0 \exp(-\alpha t)$$

解が虚数の場合は正弦波振動となる。

$$y = Y_0 \exp(j\alpha t)$$

解が両方を含む複素数の場合は減衰振動か増加振動となる。

増幅回路では増加振動になるが、やがて飽和して単振動に収まる。

受動回路では必ず減衰振動になる。